AUTOR
Daniel Omar Romero Barroso

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones)

1 **Sea f la función definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de f.**

La función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ no está definida para $x = 0$, ya que en ese punto el denominador del exponente se anula y, en consecuencia, este último se hace infinito. Es evidente, por lo tanto, que Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ y, como la función es continua en su dominio de definición, su gráfica sólo podría tener una asíntota vertical en $x = 0$. Calculemos los límites laterales de $f(x)$ en dicho punto:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}} \right) =$$

$$= [0 \cdot e^{+\infty} = \text{Indeterminación } 0 \cdot \infty] =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right] = \left[\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty} \right] \overset{L'H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

Así pues, en $x = 0$ existe una discontinuidad de salto infinito:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \; +\infty, \; \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

y, en consecuencia, la recta $x = 0$ es, en efecto, una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$, aunque solo por la derecha.

La gráfica de la función no posee ninguna asíntota horizontal, pues los límites de $f(x)$ en el infinito resultan ser infinitos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty \cdot e^0 = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} \right) = -\infty \cdot e^{\frac{1}{-\infty}} = -\infty \cdot e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Veamos ahora si, por el contrario, existe alguna asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{\frac{1}{\pm\infty}} = e^0 = 1$$

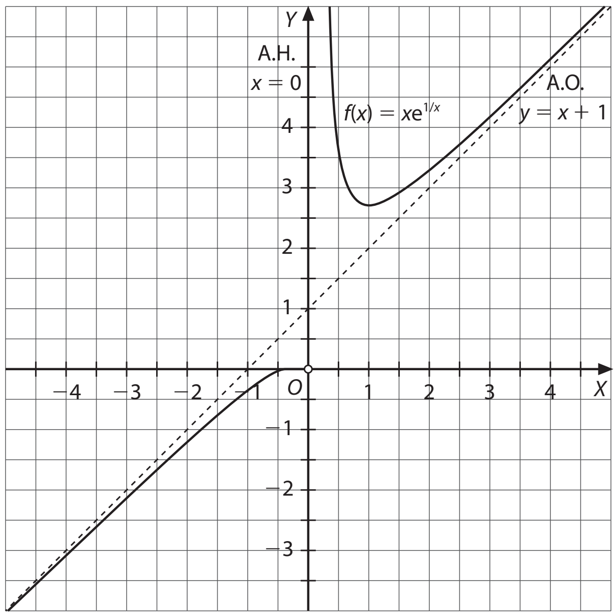
$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = [\text{Indeterminación } \pm\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right] \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = 1$$

Por tanto, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función. Con la información obtenida en este análisis podemos esbozar la gráfica de la función.



2 **Calcula:**

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\mathbf{d}x}{(x^2 - x)(x - 1)}$$

En primer lugar, calcularemos la integral indefinida por descomposición del integrando en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} = \frac{1}{x(x - 1)(x - 1)} = \frac{1}{x(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx}{x(x - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - 1)^2 + Bx(x - 1) + Cx = 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$

Si evaluamos esta última expresión en $x = 0$ y $x = 1$, obtenemos el valor de los coeficientes A y C, respectivamente:

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow C = 1$$

Con esta información, evaluamos de nuevo la expresión para cualquier otro valor de x, por ejemplo para $x = 2$, con el fin de obtener el valor del coeficiente que nos falta:

$$x = 2 \Rightarrow A + 2B + 2C = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + 2B + 2 = 1 \Rightarrow B = -1$$

En consecuencia, el integrando puede ser descompuesto como:

$$\frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

y, por lo tanto, la integral indefinida, $F(x)$, queda así:

$$F(x) = \int \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} \right) dx =$$
$$= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int (x - 1)^{-2} dx =$$
$$= \ln|x| - \ln|x - 1| - (x - 1)^{-1} + K =$$
$$= \ln|x| - \ln|x - 1| - \frac{1}{(x - 1)} + K$$

Como la función del integrando es continua en el intervalo de integración, hallamos la integral definida mediante la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x^2 - x)(x - 1)} dx = F(-1) - F(-2) =$$
$$= \left(\ln 1 - \ln 2 + \frac{1}{2} \right) - \left(\ln 2 - \ln 3 + \frac{1}{3} \right) =$$
$$= \frac{1}{6} + \ln 3 - 2 \ln 2$$

3 **Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^{-2x}$**

a) **Justifica que la recta de ecuación $y = -2ex$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = -1/2$.**

b) **Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.**

a) La función $f(x) = e^{-2x}$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo cual podemos asegurar que existe una recta tangente, $y = mx + n$, en cualquiera de sus puntos. La derivada de esta función es $f(x) = -2e^{-2x}$. En concreto, para $x = -1/2$, la pendiente, m, de la recta tangente, m, es:

$$m = f'\left(x = -\frac{1}{2}\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = e^1 = e$$

Como el valor de la función $f(x)$ en $x = -\dfrac{1}{2}$ es:

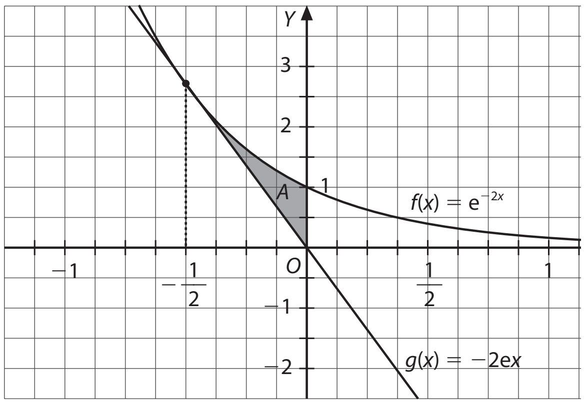
$$f\left(x = -\frac{1}{2}\right) = -2e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -2e^1 = -2e$$

la recta tangente, $y = -2ex + n$, ha de pasar, además, por el punto de tangencia $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$, de lo cual obtenemos la ordenada en el origen, n:

$$e = -2e \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + n \Leftrightarrow n = 0$$

En consecuencia, la recta tangente a la función en $x = -\dfrac{1}{2}$ es, en efecto, $y = -2ex$.

b)



Para saber cuál es el recinto cuya área debemos hallar, esbocemos las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-2x}$ y $g(x) = -2ex$.

La primera es una función exponencial decreciente que pasa el punto $(0, 1)$ y por el $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$. La segunda es una recta de pendiente negativa que pasa, asimismo, por el punto $\left(-\dfrac{1}{2}, e\right)$ y por el origen de coordenadas. Como $f(x)$ es mayor que $g(x)$ en el intervalo de integración (de hecho, lo es en todo $\mathbb{R}$), el área del recinto solicitada se calcula mediante la siguiente integral definida:

$$A = \int_{-1/2}^{0} [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1/2}^{0} [e^{-2x}(-2ex)] dx =$$
$$= \int_{-1/2}^{0} [e^{-2x} + 2ex] dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} + ex^2 \right]_{-1/2}^{0} =$$
$$= \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) - \left(-\frac{e}{2} + \frac{e}{4} \right) = \frac{-2 + 2e - e}{4} = \frac{e - 2}{4} u^2$$

4 **Considera la función *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) **Halla *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en $\mathbb{R}$.**

b) **Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abcisa $x = 3$.**

a) Nos encontramos ante una función $f(x)$ definida a trozos, cada uno de los cuales, por ser polinómico, es continuo y derivable en su respectivo dominio de definición. Por lo tanto, si $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, ha de serlo en el único lugar conflictivo: el punto de empalme de ambos trozos. Ello exige, por un lado, que los límites laterales de la función en $x = 2$ coincidan y, por otro, que las derivadas laterales de la función en $x = 2$ sean iguales.

De la primera condición se deduce:

$$f(2^-) = f(2^+)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} (ax^2 + 3x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - bx - 4)$$

$$4a + 6 = -2b$$

De la segunda:

$$f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} (2ax + 3) = \lim_{x\to 2^+} (2x - b)$$

$$4a + 3 = 4 - b$$

Considerando ambas a la vez, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4a + 6 = -2b \\ 4a + 3 = 4 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 2$ y $b = -7$. En consecuencia, la función es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) La función $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo cual podemos asegurar que existe una recta tangente, $y = mx + n$, en cualquiera de sus puntos. La derivada de esta función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 3$, la pendiente, m, de la recta tangente será:

$$m = f'(x = 3) = 13$$

Como el valor de la función $f(x)$ en $x = 3$ es:

$$f(x = 3) = 26$$

la recta tangente, $y = 13x + n$, ha de pasar, además, por el punto de tangencia (3, 26), de lo cual obtenemos la ordenada en el origen, n:

$$26 = 13 \cdot 3 + n \Leftrightarrow n = -13$$

En consecuencia, la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ resulta ser:

$$y = 13x - 13$$

Dado que $f'(3) = 13 \neq 0$, la recta normal:

$$y = m'x + n'$$

tendrá una pendiente: $m' = -\dfrac{1}{f'(3)} = -\dfrac{1}{13}$

y como esta recta ha de pasar, asimismo, por el punto de tangencia (3, 26), su ordenada en el origen, n', será:

$$26 = -\frac{1}{13} \cdot 3 + n' \Leftrightarrow n' = \frac{341}{13}$$

Así pues, la recta normal a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es:

$$y = -\frac{1}{13}x + \frac{341}{13}$$

5 **Dada la función *g*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:**

$$g(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

a) **Esboza la gráfica de *g*.**

b) **Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$**

a) La función $g(x)$ es suma y composición de funciones continuas en $\mathbb{R}$, luego $g(x)$ también será continua en $\mathbb{R}$. El valor absoluto exige que cambiemos el signo del binomio $x^2 - 1$ cuando este sea negativo, es decir, si $-1 < x < 1$. Por consiguiente, en la expresión de dicha función se esconde, en realidad, una función definida a trozos, que podemos expresar de estas dos maneras:

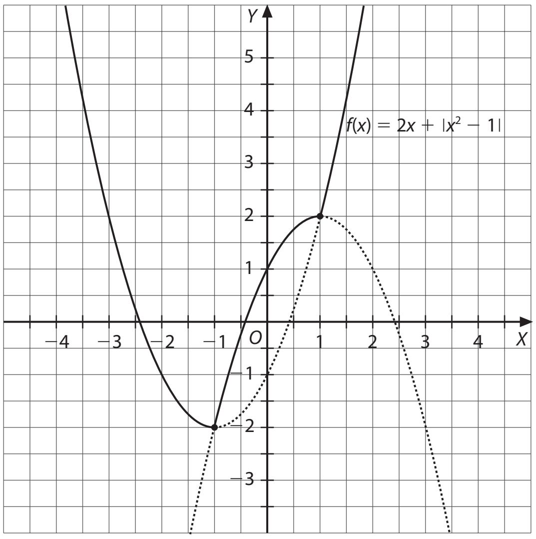
$$g(x) = \begin{cases} 2x + (x^2 - 1) & \text{si } x \le -1 \\ 2x - (x^2 - 1) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x + (x^2 - 1) & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

o bien:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

El primer y el tercer trozo son las ramas de una misma parábola abierta hacia arriba, mientras que el segundo trozo es un arco de una parábola abierta hacia abajo. Esbozaremos su gráfica mediante una tabla de valores, cuidando de emplear el trozo adecuado en cada caso:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	-1	-2	1	2	7	14



b) Como la función $g(x)$ está definida a trozos, hemos de evaluar la integral dividiéndola en dos intervalos:

$$\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 + 2x - 1)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 + 1\right) - 0\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{8}{3} + 4 - 2\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 1\right)\right] = 6$$

6 **Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por:**

$$f(x) = x^2 - 1 \ \text{ y } \ g(x) = 2x + 2$$

a) **Esboza las gráficas de *f* y *g*.**

b) **Calcula el área del recinto limitado por dichas graficas.**

a) La función $f(x)$ es una parábola abierta hacia arriba y simétrica con respecto al eje *OY*, pues tiene simetría par: $f(x) = f(-x)$. Sus puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje *OX*: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow (-1, 0), (+1, 0)$

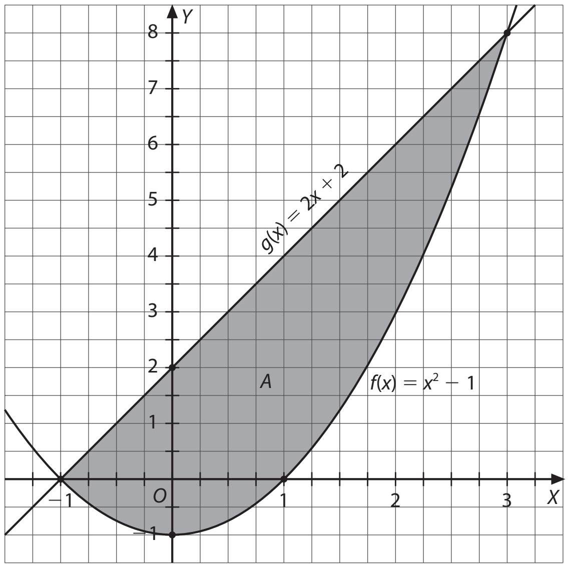
Eje *OY*: $x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0^2 - 1 \Leftrightarrow y = -1 \Leftrightarrow (0, -1)$

El vértice y mínimo absoluto de esta parábola coincide con su punto de corte con el eje *OY*, pues $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, f''(x = 0) = 2 > 0 \Leftrightarrow (0, -1)$.

Por otro lado, la función $g(x)$ es una recta de pendiente positiva cuyos puntos de corte con los ejes son los siguientes:

Eje *OX*: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow (-1, 0)$

Eje *OY*: $x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 2 \cdot 0 + 2 \Leftrightarrow g(x) = 2 \Leftrightarrow (0, 2)$



b) Ambas funciones se cortan entre sí en los puntos:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Leftrightarrow (-1, 0) \\ x_2 = 3 \Leftrightarrow (3, 8) \end{cases}$$

Como entre estos dos puntos la gráfica de la función $g(x)$ está por encima de la gráfica de la función $f(x)$, $g(x)$ es mayor que $f(x)$ en el intervalo de integración que va desde $x_1 = -1$ hasta $x_2 = 3$. Por consiguiente, el área del recinto delimitado por sus gráficas se calcula así:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} [2x + 2 - (x^2 - 1)]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{3} [-x^2 + 2x + 3]\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= (-9 + 9 + 9) - \left(-\left(\frac{-1}{3}\right) + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}u^2$$

7 **Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$**

$$x \to \log \sqrt[x]{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

a) **Calcular el dominio $f(x)$.**

b) **Estudiar si $f(x)$ es una función par.**

c) **Calcular las asíntotas de $f(x)$.**

a) Para obtener el dominio de definición de la función $f(x)$, debemos, en primer lugar, reescribir la expresión que la define empleando las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \log \sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}} = \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{x}[\log (1+x) - \log (1-x)]$$

Así pues, para que la función $f(x)$ esté bien definida han de cumplirse las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x < +1 \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\text{Dom } f(x) = (-1, +1) - \{0\} = (-1, 0) \cup (0, +1).$$

b) La función $f(x)$ es par o simétrica con respecto al eje OY si se verifica que $f(-x) = f(x)$. Comprobémoslo:

$$f(-x) = \frac{1}{-x}[\log (1-x) - \log (1+x)] =$$

$$= \frac{1}{x}[-\log (1-x) + \log (1+x)] =$$

$$= \frac{1}{x}[\log (1+x) - \log (1-x)] = f(x)$$

Luego, en efecto, la función tiene simetría par.

c) Como el dominio de la función $f(x)$ es un intervalo finito, esta carece de límites en el infinito y, por lo tanto, no existirán asíntotas horizontales ni oblicuas. Las posibles asíntotas verticales podrían situarse en los puntos $x = -1$ (solo por la derecha), $x = +1$ (solo por la izquierda) y $x = 0$. Veamos si la gráfica de la función $f(x)$ tiene asíntotas verticales en dichos puntos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left\{\frac{1}{x}[\log (1+x) - \log (1-x)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{-1}[\log 0^+ - \log 2] = -[-\infty - \log 2] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left\{\frac{1}{x}[\log (1+x) - \log (1-x)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{1}[\log 2 - \log 0^+] = [\log 2 - (-\infty)] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{0}[\log 1 - \log 1]\right\} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\ln 10} - \frac{-1}{1-x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{\ln 10}\right) = \frac{2}{\ln 10}$$

Por tanto, solo las rectas $x = \pm 1$ son asíntotas verticales de la gráfica de la función.

8 ***a)*** **Dada $F(x) = \int_0^x t \text{ sen}(t)dt$, estudiar si $x = \pi$ es una raíz de $F'(x)$.**

b) **Calcular el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para el cual:**

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}} = 1$$

a) Según el teorema fundamental del cálculo integral, si $f(t)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y $F(x)$ es la función definida en dicho intervalo como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces $F(x)$ es derivable en el intervalo (a, b) y su derivada es $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Así pues, en nuestro caso resulta que $F(x) = x \cdot \text{sen } x$. Como $F(\pi) = \pi \cdot \text{sen } \pi = 0$, concluimos que $x = \pi$ es, en efecto, una raíz de $F'(x)$.

b) Por simple inspección, vemos que si , no existe ninguna indeterminación y el límite valdría:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{1}{n^2-1}} = 1^0 = 1$$

y así, se cumpliría la condición que se nos pide. Si $\alpha \neq 0$, nos encontramos ante una indeterminación de tipo 1^∞ que resolvemos del modo siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}} = [\text{Indeterminación } 1^\infty] =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{n^2-2n+1}{n^2+n-2}-1\right)\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{n^2-2n+1-n^2-n+2}{n^2+n-2}\right)\cdot\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{3n+3}{n^2+n-2}\right)\frac{\alpha n^3+1}{n^2-1}\right]} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3\alpha n^4+3\alpha n^3+3n+3}{n^4+n^3-3n^2-n+2}} = e^{3\alpha}$$

Por lo tanto, para que el límite sea igual a la unidad, el exponente ha de ser nulo y, por lo tanto, el valor de α ha de ser 0. Concluimos, entonces, que el único valor de α para el cual el límite resulta ser 1 es $\alpha = 0$.

9 **Sean las funciones:**

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to x^3 \qquad x \to |x| \qquad x \to \text{sen}(x)$$

a) **Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de inflexión de $f(x)$.**

b) **Calcular la derivada de $(f \circ g)(x)$.**

c) **Obtener el área del recinto limitado por f y g entre $x = 0$ y $x = 1$.**

a) La función $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Sus tres primeras derivadas son:

$$f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6$$

La primera derivada solo se anula en $x = 0$, pero como en este punto también se anula la segunda derivada, no se corresponde con ningún extremo. Así pues, $f(x)$ carece de máximos y mínimos. De hecho, dado que $f'(x) \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

En $x = 0$ se anula la segunda derivada; no así la tercera derivada. Por consiguiente, la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) La función compuesta que tenemos que derivar es:

$$(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f[\text{sen } x] = (\text{sen } x)^3 = \text{sen}^3 x$$

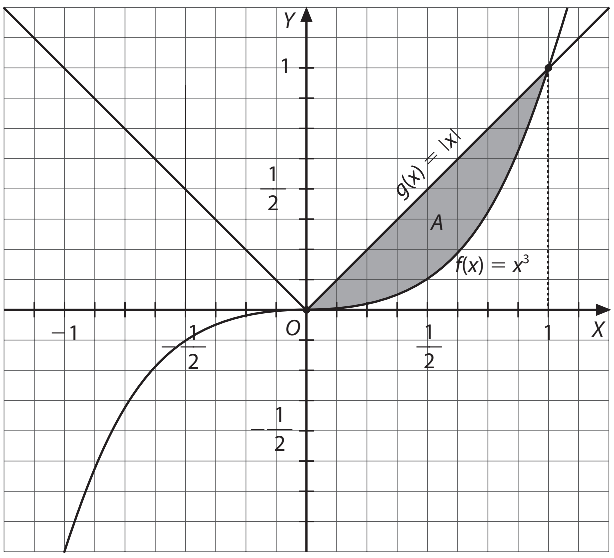
y su derivada se halla mediante la regla de la cadena:

$$(f \circ h)'(x) = f'[h(x)] \cdot h'(x) = 3 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$$

c) La función $(f)(x) = x^3$ es una función polinómica cúbica muy sencilla, como ya hemos visto: es siempre creciente y posee un punto de inflexión en $(0, 0)$. La función $g(x) = |x|$ es, en realidad, una función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si esbozamos las gráficas de ambas funciones, delimitaremos el recinto cuya área, A, hemos de calcular.



Dado que entre $x = 0$ y $x = 1$ la gráfica de la función $g(x)$ queda por encima de la gráfica de la función $f(x)$, la función $g(x)$ es mayor que la función $f(x)$ en dicho intervalo. Por lo tanto, el área solicitada se calculará mediante la integral:

$$A = \int_0^1 [g(x) - f(x)]\text{d}x = \int_0^1 (x - x^3)\text{d}x$$

Como el integrando es continuo en el intervalo de integración, según la regla de Barrow el área es:

$$A = \int_0^1 (x - x^3)\text{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}\ u^2$$

10 Encontrar el valor de *k* para el cual la función:

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} 6 - x/2 & x < 2 \\ x^2 + kx & x \geq 2 \end{cases}}$$

Es continua. Estudiar si su derivada es una función continua.

Nos encontramos ante una función $f(x)$ definida a trozos, cada uno de los cuales, por ser polinómico, es continuo en su respectivo dominio de definición. Por lo tanto, si $f(x)$ ha de ser continua en $\mathbb{R}$, hemos de forzarla a que lo sea en el único lugar conflictivo: el punto de empalme de ambos trozos. Ello exige que los límites laterales de la función en $x = 2$ coincidan:

$$f(2^-) = f(2^+)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(6 - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + kx)$$

$$5 = 4 + 2k$$

Así pues, para que la función $f(x)$ sea continua se ha de cumplir que $k = \frac{1}{2}$. Con este valor de k, la función queda así:

$$f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ x^2 + \frac{1}{2}x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Como cada trozo de esta función es derivable, su derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Esta derivada no es una función continua, pues los límites laterales en $x = 2$ no coinciden:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f'(2^+) =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

11 **Sea $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$**

a) **Calcular el máximo y el mínimo absolutos de $f(x)$.**

b) **Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al eje OY.**

c) **Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.**

a) La función $f(x)$ es racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x. Así pues, el dominio de $f(x)$ es toda la recta real. Además, es una función continua (pues carece de asíntotas verticales) y derivable en todo su dominio. La primera derivada nos informará acerca de los posibles extremos que tenga la función:

$$f'(x) = \frac{2(2x-1)\cdot 2\cdot(4x^2+1) - (2x-1)^2\cdot 8x}{(4x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{4(2x-1)(4x^2+1) - [8x(4x^2-4x+1)]}{(4x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{32x^3 - 16x^2 + 8x - 4 - 32x^3 + 32x^2 - 8x}{(4x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = \frac{4(4x^2-1)}{(4x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por sencillez, no realizaremos la segunda derivada. En su lugar, tomaremos un valor de x comprendido entre $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = +\frac{1}{2}$, por ejemplo, $x = 0$, y evaluaremos la primera derivada en este punto:

$$f'(x=0) = -1 < 0$$

Esto significa que $f(x)$ decrece en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, luego la función alcanza un máximo relativo en $x_1 = -\frac{1}{2}$, cuyo valor es $f\left(x_1 = -\frac{1}{2}\right) = 2$, y un mínimo relativo en $x_2 = +\frac{1}{2}$, cuyo valor es:

$$f\left(x_2 = \frac{1}{2}\right) = 0$$

Por otro lado, la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$, pues:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = 1$$

En consecuencia, $f(x)$ ha de crecer en la semirrecta $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, donde alcanza, desde $y = 1$, el valor $f\left(x_1 = -\frac{1}{2}\right) = 2$, y en la semirrecta $\left(+\frac{1}{2}, +\infty\right)$, donde tiende al valor $y = 1$ desde $f\left(x_2 = +\frac{1}{2}\right) = 0$. Por tanto, podemos afirmar que el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ es un máximo absoluto y que el punto $\left(+\frac{1}{2}, 0\right)$ es un mínimo absoluto.

b) La función $f(x)$ será simétrica con respecto al eje OY, esto es, tendrá simetría par, si se cumple que $f(-x) = f(x)$. En este caso:

$$f(-x) = \frac{[2(-x)+1]^2}{4(-x)^2+1} = \frac{(-2x-1)^2}{4x^2+1} =$$

$$= \frac{(-1)^2(2x+1)^2}{4x^2+1} = \frac{(2x+1)^2}{4x^2+1} \neq f(x)$$

por lo tanto, la función no es simétrica respecto del eje OY, es decir, no tiene simetría par.

c) Como la función $f(x)$ es continua en el intervalo de integración, podemos aplicar la regla de Barrow para hallar el valor de la integral definida que se nos pide:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+1} - \frac{4x}{4x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = \left[x - \frac{1}{2}\ln|4x^2+1|\right]_0^1 =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}\ln 5\right] - \left[0 - \frac{1}{2}\ln 1\right] = 1 - \frac{1}{2}\ln 5$$

12 ***a)*** **Razonar si para $F(x) = \dfrac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4}$ se satisface que $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} F'(x)$.**

b) **Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{4x^2-3x+2}\right)$**

a) Calculemos, en primer lugar, el valor de la función $F(x)$:

$$F(x) = \frac{\int_0^{x^2} t^2\,dt}{x^4} = \frac{\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{x^2}}{x^4} = \frac{\frac{1}{3}(x^2)^3}{x^4} = \frac{\frac{1}{3}x^6}{x^4} = \frac{1}{3}x^2$$

La derivada de esta función será: $F'(x) = \frac{2}{3}x$

Hallemos, por último, los límites a comparar:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^2\right) = 0 \\ \lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}x\right) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} F'(x)$$

Luego, en efecto, $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} F'(x)$.

b) Resolveremos, paso a paso, las indeterminaciones que aparezcan hasta dar con el límite pedido:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1} - \sqrt{4x^2-3x+2}\right) =$$
$$= [\text{Indeterminación } \infty - \infty]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2-3x+2}\right)}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{4x^2-3x+2}\right)^2}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}+3x-2}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2-3x+2}} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x^2}}+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

13 **Sea** $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

a) **Estudiar su dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.**

b) **Calcular** $\lim_{x\to+\infty} [x^2(f(x+1) - f(x))]$

a) La función $f(x)$ viene definida por una expresión racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = -1$; no así el numerador. Por lo tanto, tenemos que Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y, como la función es continua en su dominio de definición, su gráfica solo podrá tener una asíntota vertical en $x = -1$.

Calculemos los límites laterales de $f(x)$ en dicho punto:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Así pues, la gráfica de $f(x)$ tiene, en efecto, una asíntota vertical en $x = -1$, punto en el cual la función presenta una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito.

Por otro lado, como el grado del polinomio presente en el numerador es el mismo que el grado del polinomio que aparece en el denominador, tenemos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x+1} = 2$$

por lo cual la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota horizontal en $y = 2$. Al tener una asíntota horizontal, no puede tener ninguna asíntota oblicua.

La primera derivada nos dirá los posibles extremos que tenga la función:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \;\forall\, x$$

Así pues, como la derivada no se anula en ningún valor de la variable independiente, x, la función $f(x)$ carece de extremos. Además, esta primera derivada es siempre positiva, luego podemos afirmar que la función $f(x)$ es estrictamente creciente en todo su dominio, es decir, en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

b) El límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty} [x^2 f(x+1) - f(x)] =$$

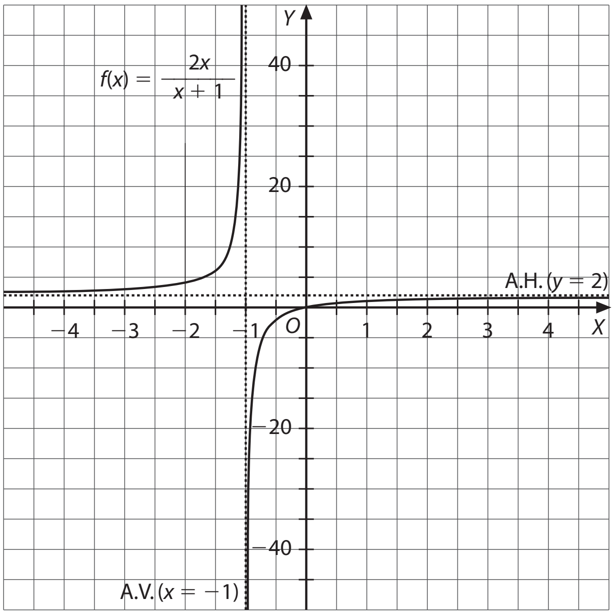
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\frac{2(x+1)}{(x+1)+1} - \frac{2x}{x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\frac{2x+2}{x+2} - \frac{2x}{x+1}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3+2x^2}{x+2} - \frac{2x}{x+1}\right] = \infty - 2 = \infty$$

Con la información que hemos obtenido hasta ahora, podemos esbozar la gráfica de esta función.

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)



14 **Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que, dada la estructura de la empresa, sólo puede optar por alarmas de dos tipos, A o B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas del tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. Estudiar cuantas alarmas de cada tipo deben instalar en la empresa para maximizar la seguridad.**

Designemos por x e y el número de alarmas del tipo A y B, respectivamente, que la empresa va a instalar. La seguridad, S, de la empresa viene determinada en función del número de alarmas por la expresión:

$$S(x, y) = \frac{1}{10}\, x \cdot y^2$$

Dado que la empresa instalará nueve alarmas, está claro que $x + y = 9$, de donde $y = 9 - x$. Como $x \geq 0$ e $y \geq 0$, resulta que $0 \leq x \leq 9$ y $0 \leq y \leq 9$. Por lo tanto, la función seguridad queda como:

$$S(x) = \frac{1}{10}\, x\,(9 - x)^2 = \frac{1}{10}\, x\,(81 + x^2 - 18x) =$$

$$= \frac{1}{10}\,(x^3 - 18x^2 + 81x)$$

Las dos primeras derivadas de esta función son:

$$S'(x) = \frac{1}{10}\,(3x^2 - 36x + 81),\quad S''(x) = \frac{1}{10}\,(6x - 36)$$

Los extremos se encontrarán donde se anule la primera derivada:

$$S'(x) = \frac{1}{10}\,(3x^2 - 36x + 81) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 36x + 81 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

La segunda derivada evaluada en dichos puntos es:

$$S''(x_1 = 3) = -\frac{18}{10} < 0,\quad S''(x_2 = 9) = \frac{18}{10} > 0$$

Como el máximo corresponde a $x_1 = 3$ e $y_1 = 9 - 3 = 6$, se alcanzará la máxima seguridad instalando 3 alarmas del tipo A y 6 alarmas del tipo B.

15 **Considera la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) **Determine el dominio de definición, estudie la continuidad y halle las asíntotas.**

b) **Esboce la gráfica de la función.**

c) **Halle los puntos donde la recta tangente es paralela a la recta $x + 4y = 0$.**

a) Nos encontramos ante una función $f(x)$ definida a trozos. El primero de ellos es una función racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = 1$, mientras que el numerador es distinto de 0 en dicho punto. Por lo tanto, en $x = 1$ la función $f(x)$ no está definida y sus límites laterales son:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} = \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} = \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Así pues, la función $f(x)$ presentará una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito en $x = 1$ y su gráfica tendrá una asíntota vertical en este punto. Además, como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la gráfica de la función $f(x)$ tendrá, asimismo, una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{-\infty - 1} = -\frac{1}{\infty} = 0^-$$

El segundo trozo es una función polinómica que será continua en su respectivo dominio de definición, ya que lo es en todo $\mathbb{R}$. En consecuencia, solo habrá otro punto conflictivo, que será el punto de unión de ambos trozos, es decir, $x = 2$. Los límites laterales de la función $f(x)$ en este otro punto son:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} = \left(\frac{1}{x - 1}\right) = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

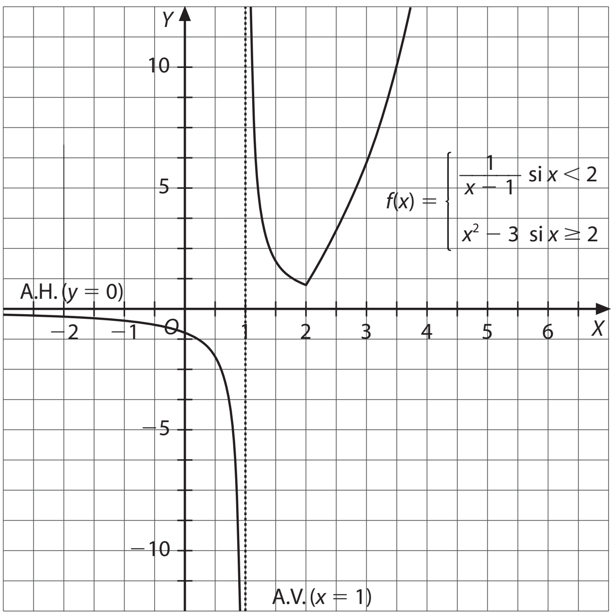
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3) = 2^2 - 1 = 1$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

En conclusión, la función $f(x)$ es continua en todo su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{1\}$; y su gráfica presenta una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y = 0$.

b) El primer trozo de la función $f(x)$ consta de una rama entera de una hipérbola y un trozo de la otra rama, mientras que el segundo es una rama de una parábola abierta hacia arriba. Si tenemos en cuenta, además, toda la información obtenida en el apartado anterior, podemos esbozar la gráfica la función $f(x)$. Para mayor precisión, evaluaremos la función $f(x)$ en varios puntos, cuidando de emplear el trozo adecuado en cada caso:

x	-2	-1	0	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	6	13



c) La función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$, y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Podemos asegurar, por tanto, que existe una recta tangente a la función en cada punto de abscisa $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$. Si la recta tangente ha de ser paralela a la recta:

$$x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x$$

habrá de tener pendiente negativa, luego tan solo consideraremos el primer trozo de la función $f(x)$, al ser éste el único cuya gráfica está inclinada hacia abajo.

Igualamos, pues, la derivada de la función, para $x < 2$, al valor $-\frac{1}{4}$, que es la pendiente de la recta dada:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Como el primer trozo solo está definido para $x < 2$, la primera solución no es válida. Por consiguiente, en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ la recta tangente a la gráfica $f(x)$ es paralela a la recta de ecuación $x + 4y = 0$.

16 **Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.**

a) **Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.**

b) **Represente gráficamente la función.**

c) **Halle el área delimitada por la función y el eje *OX*, para $-1 \leq x \leq 1$.**

a) La función $f(x)$ es una función racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x. Así pues, el dominio de esta función es toda la recta real y su gráfica no puede tener asíntotas verticales. Además, la función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio de definición. Como el grado del denominador es superior al grado del numerador, la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, por lo cual no puede haber asíntotas oblicuas. Los límites en el infinito son:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0^{\pm}}{1 + 0} = 0^{\pm}$$

Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son, debidamente simplificadas:

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

Donde se anule la primera derivada podrán encontrarse los extremos de la función:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{cases}$$

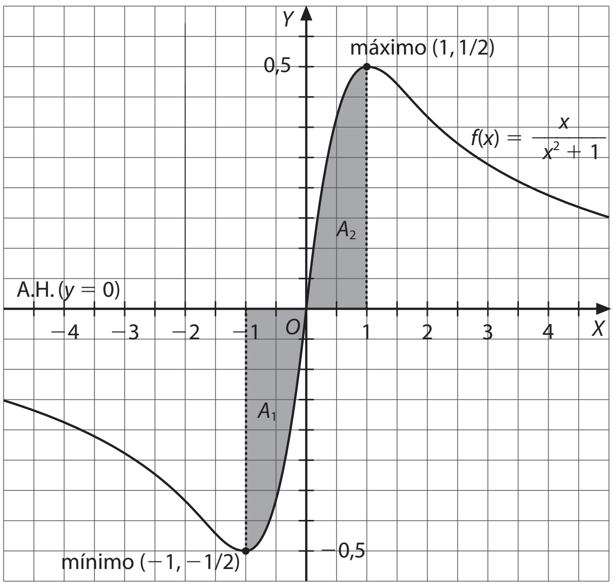
La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = -1) = \frac{2(-1)((-1)^2 - 3)}{((-1)^2 + 1)^3} = 2 > 0,$$

$$f''(x_2 = +1) = \frac{2 \cdot 1(1^2 - 3)}{(1^2 + 1)^3} = -2 < 0$$

Luego $x_1 = -1$ corresponde a un mínimo cuyo valor es $f(x_1 = -1) = -\frac{1}{2}$, y $x_2 = +1$ corresponde a un máximo cuyo valor es $f(x_2 = +1) = +\frac{1}{2}$. Por otro lado, como la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, estos extremos han de ser absolutos.

b) Sabemos que la función $f(x)$ alcanza su mínimo absoluto en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y su máximo absoluto en el punto $\left(+1, +\frac{1}{2}\right)$, y que su gráfica tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$. Además, la función $f(x)$ tiene simetría impar, pues $f(-x) = -f(x)$, y pasa por el punto (0, 0). Con esta información podemos esbozar su gráfica.



c) Como la función $f(x)$ corta al eje OX en $x = 0$, el área del recinto delimitado por la función y el eje OX, para $-1 \leq x \leq +1$, hemos de calcularla separándola en dos trozos. En el primero de ellos, desde $x = -1$ hasta $x = 0$, la función es negativa, mientras que en el segundo, desde $x = 0$ hasta $x = +1$, la función es positiva. Así pues, el área total, A, del recinto, podrá calcularse como la suma de dos áreas, A_1 y A_2, las cuales, por la simetría impar de la función, han de ser iguales.

Por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_{0}^{+1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+1} f(x)\mathrm{d}x$$

Como la función $f(x)$ es continua en el intervalo de integración, la regla de Barrow nos dará el valor de esta área:

$$A = 2\int_{0}^{+1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+1} \frac{x}{x^2 + 1}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+1} \frac{2x}{x^2 + 1}\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\ln\left|x^2 + 1\right|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\ u^2$$

17 **Se considera la función $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2 + 1}$.**

a) **Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión.**

b) **Para $x \in [0, 5]$, esboce la gráfica de la función y calcule el área comprendida entre ella y el eje x.**

a) Tenemos una función racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x, por lo cual la función $f(x)$ está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Las dos primeras derivadas de la función, simplificadas, son:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

Los extremos podrán hallarse donde se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = -1) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f''(x) = (x_2 = +1) = +\frac{1}{2} > 0$$

luego la función alcanza un máximo relativo en el punto de abscisa $x_1 = -1$, cuyo valor es $f(x_1 = -1) = 5/2$; y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x_2 = +1$, cuyo valor es $f(x_2 = +1) = 3/2$. Por otro lado, como la gráfica de la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2^{\mp}$, podemos asegurar que estos extremos son absolutos.

Los puntos de inflexión se encontrarán donde se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{3}$$

En $x_3 = 0$ la función $f(x)$ ha de tener un punto de inflexión, pues antes de ese punto es abierta hacia abajo (alcanza un máximo en $x_1 = -1$) y después es abierta hacia arriba (alcanza un mínimo en $x_2 = +1$); el valor de la función en este punto es $f(x_3 = 0) = 2$.

En $x_4 = -\sqrt{3}$ la función $f(x)$ también ha de tener un punto de inflexión, pues antes de $x_4 = -\sqrt{3}$ la función es abierta hacia arriba (tiende asintóticamente a la recta $y = 2$ desde arriba); el valor de la función en este punto es, por lo tanto, $f\left(x_4 = -\sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3}/4$.

Asimismo, en $x_5 = +\sqrt{3}$ la función $f(x)$ ha de tener otro punto de inflexión, ya que después es abierta hacia abajo (tiende asintóticamente a la recta $y = 2$ desde abajo); el valor de la función en este punto es, por lo tanto, $f(x_5 = +\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}/4$.

En conclusión, los puntos críticos de la función $f(x)$ son los siguientes:

$$\text{máximo absoluto en } \left(-1, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{mínimo absoluto en } \left(+1, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{puntos de inflexión en } \left(-\sqrt{3}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0, 2)$$

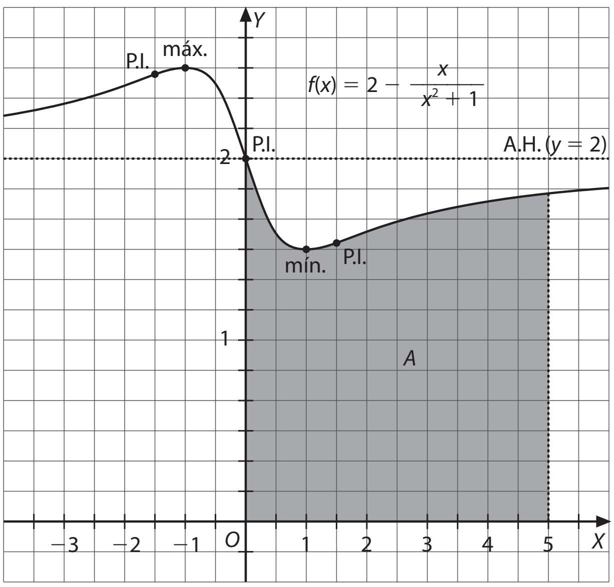
$$\text{y } \left(+\sqrt{3}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

b) Con la información obtenida en el apartado anterior podemos esbozar la gráfica de la función $f(x)$, no solo en el intervalo [0, 5], tal como pide el ejercicio, sino en toda la recta real. Para $x \in [0, 5]$, la función no corta al eje OX y es estrictamente positiva; de hecho, $f(x)$ carece de puntos de corte con el eje OX y es estrictamente positiva en todo $\mathbb{R}$. Como, además, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo es, en particular, en el intervalo de integración [0, 5]. Así pues, según la regla de Barrow, el área comprendida entre la función $f(x)$ y el eje OX para $x \in [0, 5]$ es:

$$A = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 \left(2 - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \left[2x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_0^5 =$$

$$= \left(10 - \frac{1}{2}\ln 26\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\ln 1\right) = 10 - \frac{1}{2}\ln 26 \ u^2$$



18 **Calcule los límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

Daremos con los límites que se piden resolviendo las indeterminaciones que aparezcan en cada caso.

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}\right) = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x^4+1}-1)(\sqrt{x^4+1}+1)}{x^4(\sqrt{x^4+1}+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x^4+1}) - 1^2}{x^4(\sqrt{x^4+1}+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^4 + \cancel{1} - \cancel{1}}{x^4(\sqrt{x^4+1}+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(\sqrt{x^4+1}+1)}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right) = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = [\text{Indeterminación } \infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x-1)}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}\right) =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{e^x - xe^x - 1}\right) =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{2e^x + xe^x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{e^x}}{(2+x)\cancel{e^x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2+x}\right) = \frac{1}{2}$$

19 **Para la función dada por:**

$$f(x) = \begin{cases} (ax^2 + \beta x + \gamma)e^{-x+1} & \text{si } x > 1 \\ \text{sen}\,(x-1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encontrar los valores α, β y γ que hacen que $f(x)$ sea continua, y admita primera y segunda derivada en el punto $x = 1$.

El primer trozo de la función $f(x)$ viene determinado por una función senoidal, que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, en $x \leq 1$. El segundo trozo está definido como el producto de un polinomio cuadrático por una exponencial decreciente, dos funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, la función resultante es, asimismo, continua y derivable en

$x > 1$. El único punto conflictivo con respecto a la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$ será, entonces, el punto de unión de ambos trozos, esto es, $x = 1$. La continuidad exige que los límites laterales de la función en $x = 1$ coincidan:

$$f(1^-) = f(1^+)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} [\text{sen } (x - 1)] = \lim_{x\to 1^+} [(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x+1}]$$

$$0 = \alpha + \beta + \gamma$$

Que admita primera derivada en $x = 1$ implica lo siguiente:

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} [\cos (x - 1)] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \{[-\alpha x^2 + (2\alpha - \beta)x + \beta - \gamma]e^{-x+1}\}$$

$$1 = \alpha - \gamma$$

Finalmente, que tenga segunda derivada en $x = 1$ requiere:

$$f''(1^-) = f''(1^+)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f''(x) = \lim_{x\to 1^+} f''(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} [-\text{sen } (x - 1)] =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \{[\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + 2\alpha - 2\beta + \gamma]e^{-x+1}\}$$

$$0 = -\alpha - \beta + \gamma$$

Así pues, para que la función $f(x)$ sea continua y dos veces derivable en $x = 1$, los parámetros α, β y γ han de verificar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha \qquad - \gamma = 1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación tenemos $y = \alpha - 1$, relación que introducida en la segunda ecuación implica que $\beta = -1$. Si llevamos estos valores de β y γ a la primera ecuación, obtenemos que $\alpha = 1$, por lo cual $\gamma = 0$. En definitiva, los valores α, β y γ que hacen de $f(x)$ una función continua y dos veces derivable en el punto $x = 1$ son $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y $\gamma = 0$. Así, la función $f(x)$ queda de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } (x - 1) & \text{si } x \leq 1 \\ (x^2 - x)e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

20 **Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar los valores a, b, c y d para que se cumplan las siguiente condiciones: 1°) Que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (0, 2) sea paralela a la recta $y + 1 = 0$, y 2°) Que la recta $x - y - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.**

En primer lugar, se observa con claridad que la función $f(x)$ ha de pasar por el punto (0, 2), o sea:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow d = 2$$

Esta función polinómica es derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo cual podemos asegurar que existe una recta tangente en cualquiera de sus puntos. Si la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto (0, 2) ha de ser paralela a la recta $y = -1$, la función $f(x)$ ha de tener un punto crítico (extremo o punto de inflexión) en (0, 2), pues la pendiente en este punto ha de ser nula. Así pues:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Por otro lado, si la recta $y = x - 2$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$, la pendiente de esta función en dicho punto ha de coincidir con la pendiente de esta recta. Es decir:

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow 3a + 2b = 1$$

Finalmente, como la función $f(x)$ ha de pasar por el punto de tangencia, esta ha de valer lo mismo que la recta $y = x - 2$ en $x = 1$. Esto es:

$$f(1) = -1 \Leftrightarrow a + b + 2 = -1 \Leftrightarrow a + b = -3$$

De estas dos últimas condiciones obtenemos que los parámetros a y b han de verificar:

$$\begin{cases} a + 3b = -3 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ \qquad b = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -10 \end{cases}$$

En conclusión, los parámetros han de ser $a = 7$, $b = -10$, $c = 0$ y $d = 2$, con lo cual la función $f(x)$ queda así:

$$f(x) = 7x^3 - 10x^2 + 2$$

21 **Calcular el valor de a para que la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$ sea el doble del área de la región limitada por dicha parábola y la recta $y = 1$.**

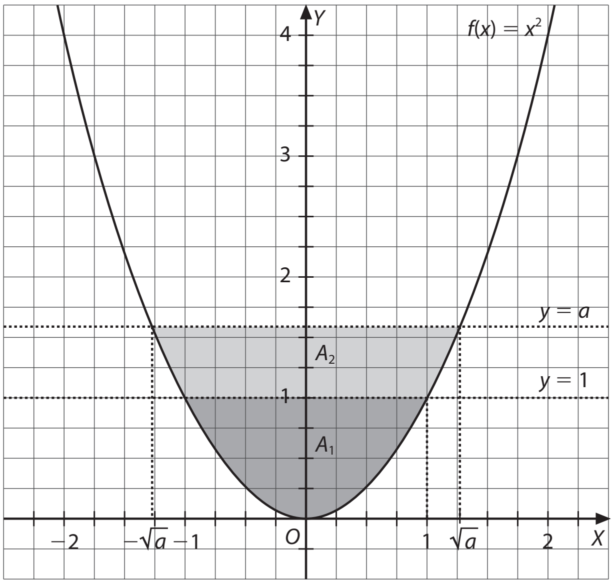
La función $f(x) = x^2$ es una parábola abierta hacia arriba simétrica con respecto al eje OY y pasa por el origen, que es el vértice de la parábola y mínimo absoluto de la función. Por otro lado, la función $y = 1$ es una línea recta horizontal que pasa por el punto de ordenada $y = 1$. De forma análoga, la función $y = a$ será una línea recta horizontal que pasa por el punto de ordenada $y = a$. Hallemos los puntos de intersección de la parábola y ambas funciones:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) = a \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Si, una vez obtenida toda la información, representamos la parábola y las dos rectas. Obtendremos la región delimitada por la parábola y la recta $y = 1$, cuya área

llamaremos A_1, y la región delimitada por la parábola y la recta $y = a$, cuya área llamaremos A_2.



Como todas estas funciones son continuas, podemos calcular el área mediante integrales definidas y la regla de Barrow. Además, en el intervalo $(-1, +1)$ la recta $y = 1$ es mayor que la función $f(x) = x^2$, pues la recta queda por encima de la parábola; asimismo, en el intervalo $\left(-\sqrt{a}, +\sqrt{a}\right)$ la recta $y = a$ es mayor que la función $f(x) = x^2$, pues esta recta queda por encima de la parábola. Por lo tanto, calcularemos las áreas de estas dos regiones por medio de las siguientes integrales:

$$A_1 = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{+1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\,u^2$$

$$A_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} (a - x^2)\mathrm{d}x = \left[ax - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}} =$$

$$= \left[a\sqrt{a} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{a}\right)^3\right] - \left[a\left(-\sqrt{a}\right) - \frac{1}{3}\left(-\sqrt{a}\right)^3\right] =$$

$$= \left(a\sqrt{a} - \frac{1}{3}a\sqrt{a}\right) - \left(-a\sqrt{a} + \frac{1}{3}a\sqrt{a}\right) =$$

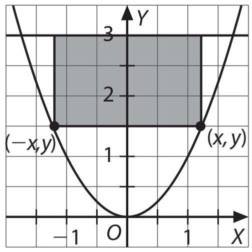
$$= 2a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}\,u^2$$

Finalmente, si el área A_2 ha de ser el doble que el área A_1, entonces

$$A_2 = 2A_1 \Leftrightarrow \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}a\sqrt{a} = 2\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \Leftrightarrow a^{3/2} = 2 \Leftrightarrow a = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

y la recta será $y = \sqrt[3]{4}$.

22 **Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$:**

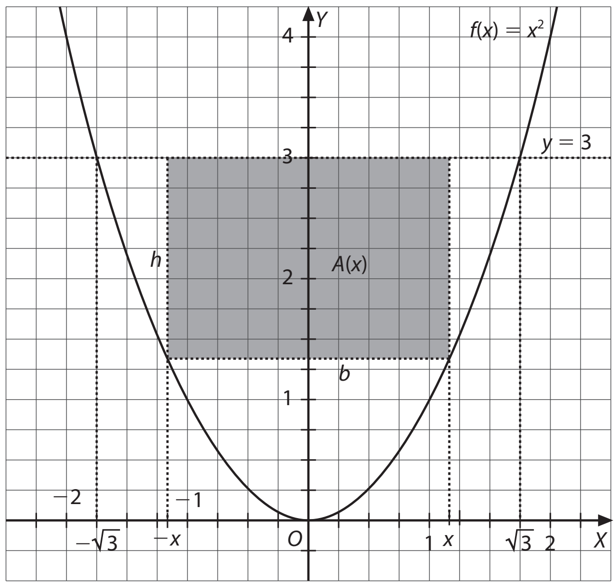


De entre los rectángulos situados como el de la figura anterior, determinar el que tiene el área máxima.

La función $f(x) = x^2$ es una parábola abierta hacia arriba simétrica con respecto al eje OY y pasa por el origen, que es el vértice de la parábola y mínimo absoluto de la función. Por otro lado, la función $y = 3$ es una línea recta horizontal que pasa por el punto de ordenada $y = 3$. Calculemos los puntos de intersección de ambas funciones:

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Con esta información, representamos las funciones y el rectángulo circunscrito en la región que ambas delimitan.



Tomemos un punto de abscisa x positiva para marcar la mitad de la base, b, de este rectángulo. Con esto, tenemos que $0 \le x \le \sqrt{3}$ y $b = 2x$. Por otro lado, la altura, h, del rectángulo será igual a la diferencia entre ambas funciones, esto es, $h = 3 - x^2$. Por consiguiente, el área, $A(x)$, del rectángulo vendrá determinada por la función:

$$A(x) = b \cdot h = 2x(3 - x^2) = 6x - 2x^3 \quad \left(0 \le x \le \sqrt{3}\right)$$

Las dos primeras derivadas de esta función son:

$$A'(x) = 6 - 6x^2,\ \ A''(x) = -12x$$

Ahora vemos donde se anula la primera derivada:

$$A'(x) = 6 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Como $x \geq 0$, solo es válido el punto de abscisa $x = +1$, el cual corresponde, efectivamente, a un máximo de la función, ya que $A''(x = +1) = -12 < 0$. En conclusión, el rectángulo de área máxima circunscrito en la región delimitada por la recta $y = 3$ y la parábola $f(x) = x^2$ tiene como base $b = 2u$, y como altura, $h = 2u$; o sea, es el cuadrado de lado $2u$ y área $A = 4u^2$.

23 Dada la función $f(x) = 1 - x^2 e^{-x^2}$ se pide:

i) **Hallar las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.**

ii) **Calcular, si existe, la ecuación de la asíntota horizontal.**

i) La función $f(x) = 1 - x^2 \cdot e^{-x^2}$ es suma, producto y composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real. Por lo tanto, $f(x)$ será continua y derivable en toda la recta real, que es todo su dominio de definición. Las dos primeras derivadas de la función son las siguientes:

$$f'(x) = (2x^3 - 2x)e^{-x^2},\ f''(x) = (-4x^4 + 10x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Los extremos podrán hallarse donde se anule la primera derivada:

$$f'(x) = (2x^3 - 2x)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 1$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = 0) = -2 < 0,\ f''(x_2 = -1) = \frac{4}{e} > 0,$$
$$f''(x_3 = +1) = \frac{4}{e} > 0$$

luego la función $f(x)$ posee un máximo en el punto de abscisa $x_1 = 0$ y sendos mínimos en los puntos de abscisa $x_2 = -1$ y $x_3 = +1$. El valor de la función en dichos puntos es $f(x_1 = 0) = 1$, $f(x_2 = -1) = 1 - \frac{1}{e}$ y $f(x_3 = +1) = 1 - \frac{1}{e}$. En definitiva, los extremos de la función son los siguientes:

Máximo relativo en $(0, 1)$

Mínimos relativos en $\left(-1, 1 - \frac{1}{e}\right)$ y $\left(+1, 1 - \frac{1}{e}\right)$

ii) Como la función $f(x)$ no se hace infinita en ningún valor finito de la variable x, la gráfica de $f(x)$ carece de asíntotas verticales. En cambio, la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$ por ambos lados:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (1 - x^2 e^{-x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^{x^2}}\right) =$$
$$= \left[1 - \text{Indeterminación} \frac{+\infty}{+\infty}\right]^{L'H} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}e^{x^2}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{x^2}}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0^+ = 1^-$$

La gráfica de la función $f(x)$ carece, por lo tanto, de asíntotas oblicuas. Si, finalmente, tenemos en cuenta el comportamiento asintótico de la función, la cual se aproxima a la recta de ecuación $y = 1$ desde abajo, podemos asegurar que los extremos obtenidos en el apartado anterior son máximos y mínimos absolutos.

24 Hallar los valores de *a, b* y *c* de forma de la función $f(x)$ sea continua en el intervalo $[-2, 3]$, derivable en el intervalo $(-2, 3)$ y, tal que, $f(2) = f(3)$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & -2 \leq x < 0 \\ c + \sqrt{x+1} & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El primer trozo de la función $f(x)$ viene determinado por un polinomio cuadrático que, como tal, es continuo y derivable en todo $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, en el intervalo $[-2, 0)$. El segundo trozo contiene una raíz cuadrada que es continua en la semirrecta $[-1, \infty)$ y derivable en $(-1, \infty)$, por lo cual será continua y derivable en el intervalo $[0, 3]$. Así pues, la función $f(x)$ es continua y derivable en su todo su dominio de definición, salvo, quizás, en el punto de unión de ambos trozos, esto es, en $x = 0$. La continuidad exigirá que los límites laterales de la función en $x = 0$ coincidan:

$$f(0^-) = f(0^+)$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to 0^-} (ax + bx^2) = \lim_{x\to 0^+} \left(c + \sqrt{x+1}\right)$$
$$0 = c + 1$$
$$c = -1$$

La derivabilidad requerirá que las derivadas laterales de la función coincidan en:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$
$$\lim_{x\to 0^-} (ax + 2bx) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Finalmente, que la función adopte el mismo valor en los extremos del intervalo en el que está definida se traduce en lo siguiente:

$$f(-2) = f(3)$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2}x+bx^2\right)=\lim_{x\to 3^-}\left(-1+\sqrt{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}(-2)+b(-2)^2=1+\sqrt{3+1}$$

$$-\cancel{1}+4b=-\cancel{1}+\sqrt{4}$$

$$b=\frac{1}{2}$$

Así pues, para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en su intervalo de definición y adopte idéntico valor en los extremos de este, los parámetros han de ser $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ y $c=-1$. Con ello, la función $f(x)$ queda de la siguiente manera:

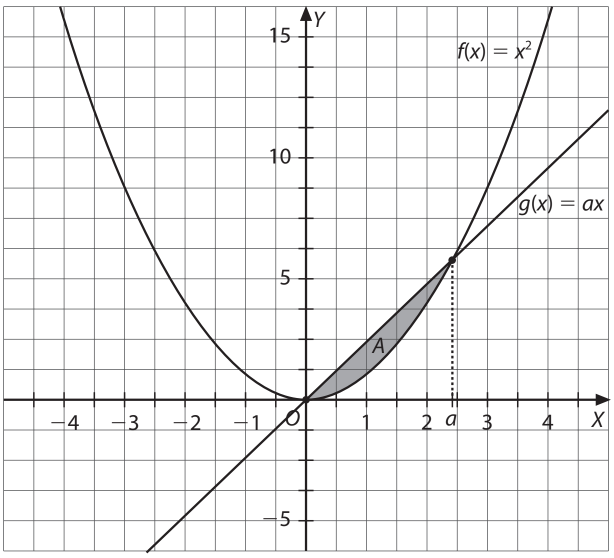
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+x^2) & \text{si } -2\le x<0\\ \sqrt{x+1}-1 & \text{si } -0\le x\le 3\end{cases}$$

25 **Determina el valor de *a*, siendo $a>0$, para que el área de la región limitada por la curva $y=x^2$ y la recta $y=ax$ sea igual a 9/2.**

La función $f(x)=x^2$ es una parábola abierta hacia arriba simétrica con respecto al eje OY y pasa por el origen de coordenadas, que es el vértice de la parábola y mínimo absoluto de la función. Por otro lado, la función $g(x)=ax$ es una recta de pendiente positiva ($a>0$) que pasa, asimismo, por el origen. Hallemos los puntos de intersección de la parábola y la recta:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3=ax\Leftrightarrow x^2-ax=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-a)=0\Leftrightarrow x_1=0, x_2=a$$

Con la información obtenida representamos ambas funciones para obtener la región por ellas delimitada.



Como estas funciones son continuas, podemos calcular el área, *A*, de esta región mediante integrales definidas y aplicando la regla de Barrow. Como en el intervalo $(0, a)$ la función $g(x)=ax$ es mayor que la función $f(x)=x^2$, ya que la recta queda por encima de la parábola, calcularemos el área por medio de la siguiente integral definida:

$$A=\int_{x_1}^{x_2}[g(x)-f(x)]dx=\int_0^a(ax-x^2)dx=$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\left[\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right]=\frac{a^3}{6}$$

Por último, si esta área debe valer $\frac{9}{2}$, entonces:

$$A=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a^3=27\Leftrightarrow a=3$$

y la recta será, por lo tanto, $g(x)=3x$.

26 **Calcular las siguiente integrales:**

i) $\int(2x-1)ln(x)dx$

ii) $\int\frac{1-x}{1+4x^2}dx$

i) Realizaremos esta integral por partes:

$$\int\underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{(2x-1)dx}_{dv}=$$

$$=\underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{(x^2-x)}_{v}-\int\underbrace{(x^2-x)}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du}=$$

$$=(x^2-x)\ln(x)-\int(x-1)\,dx=$$

$$=(x^2-x)\ln(x)-\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)+K$$

ii) Esta integral se resuelve separando el integrando en dos fracciones. Así, veremos cómo la integral de la primera fracción es de tipo arcotangente, mientras que la integral de la segunda fracción es de tipo logarítmico:

$$\int\frac{1-x}{1+4x^2}dx=\int\frac{1}{1+4x^2}dx-\int\frac{x}{1+4x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2}{1+(2x)^2}dx-\frac{1}{8}\int\frac{8x}{1+4x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\text{arctg}\,(2x)-\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right|+K$$

27 **Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2}$$

a) **Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).**

b) **Comprueba que tiene como eje de simetría el eje de coordenadas (función simétrica respecto *OY*).**

c) **Determina el punto de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y las asíntotas de *f*. Haz su representación gráfica.**

a) A causa del valor absoluto que figura en el numerador, nos encontramos aquí ante una función definida a trozos que podemos expresar así:

$$\begin{cases} \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Cada uno de los trozos es una función racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x. Por lo tanto, cada trozo es continuo y derivable en su respectivo dominio de definición. La derivabilidad de la función $f(x)$ podría fallar, sin embargo, en el punto de unión de ambos trozos, esto es, en $x = 0$. Veamos primero si $f(x)$ es continua en dicho punto, pues de no serlo, tampoco sería derivable (la continuidad es una condición necesaria, aunque no suficiente, para derivabilidad). La continuidad exige que los límites laterales coincidan en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $x = 0$. Ello no significa, en cambio, que sea derivable en este punto. Ahora hemos de ver si las derivadas laterales en $x = 0$ coinciden o no:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{x}{x^2+1}\right)' = \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right] = \frac{-1}{(0+1)^2} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right] = \frac{-1}{(0+1)^2} = 1$$

La función $f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues sus derivadas laterales no coinciden en este punto. Por consiguiente, la derivada de esta función está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ según la función siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) En efecto, la función $f(x)$ tiene como eje de simetría el eje *OY*, es decir, es simétrica par. Para comprobarlo, evaluemos la función en un punto genérico de abscisa negativa, esto es, en $-x$, en el primero de sus trozos:

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

Este resultado es el mismo al que habríamos llegamos evaluando la función en un punto genérico de abscisa positiva, esto es, en x, en el segundo de sus trozos:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Así pues, $f(-x) = f(x)$, condición que verifica cualquier función que sea simétrica con respecto al eje *OY*.

c) La función $f(x)$ corta a los ejes de coordenadas en el origen, esto es, en el punto (0, 0), pues $f(x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$ y $f(x = 0) = 0$.

Para determinar los intervalos de crecimiento, localicemos primero los extremos de la función. Estos podrán hallarse donde se anule la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & \text{si } x < 0 \\ x_2 = +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como cada trozo de $f'(x)$ es una función racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x, estos son continuos y derivables en sus respectivos dominios de definición. Por lo tanto, derivamos de nuevo cada uno de estos trozos para obtener la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Esta segunda derivada evaluada en los extremos posibles arroja los siguientes valores:

$$f''(x_1 = -1) = \frac{2(-1)(3-(-1)^2)}{((-1)^2+1)^3} = -2 < 0,$$

$$f''(x_2 = +1) = \frac{2 \cdot 1(1^2-3)}{(1^2+1)^3} = -2 < 0$$

Luego $x_1 = -1$ corresponde a un máximo cuyo valor es $f(x_1 = -1) = +\frac{1}{2}$, y $x_2 = +1$ corresponde a otro máximo cuyo valor es $f(x_2 = +1) = +\frac{1}{2}$. Por otro lado, como la función $f(x)$ es siempre positiva (el valor absoluto del numerador es, por definición, positivo, mientras que el denominador es estrictamente positivo) en $x_3 = 0$, ha de encontrarse un mínimo, pues en este punto la función alcanza su menor valor posible, es decir, $f(x_3 = 0) = 0$. En resumen, la función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +1)$ y decreciente en $(-1, 0) \cup (+1, +\infty)$.

Los puntos de inflexión se localizan donde se anula la segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x_4 = -\sqrt{3} = 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x_5 = +\sqrt{3} = 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El valor de la función en estos puntos es $f\left(x_4 = -\sqrt{3}\right) = +\sqrt{3}/4$ y $f\left(x_5 = +\sqrt{3}\right) = +\sqrt{3}/4$.

Obtengamos ahora las asíntotas de la función $f(x)$. Como ya sabemos, esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que su gráfica no puede tener asíntotas verticales. Por otro lado, en cada uno de sus trozos el grado del denominador es superior al grado del numerador, así que la gráfica de la función $f(x)$ posee, por ambos lados, una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$. Por ello, no podrá haber asíntotas oblicuas. Calculemos los límites en el infinito asociados a la asíntota horizontal $y = 0$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{0^+}{1+0} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{0^+}{1+0} = 0^+$$

Así pues, la función tiende de manera asintótica a la recta horizontal $y = 0$ por ambos lados y desde arriba; no podía ser de otra forma, ya que $f(x) \geq 0$. Debido a este comportamiento asintótico y a que $f(x) \geq 0$, podemos afirmar que los extremos de la función son, todos ellos, absolutos.

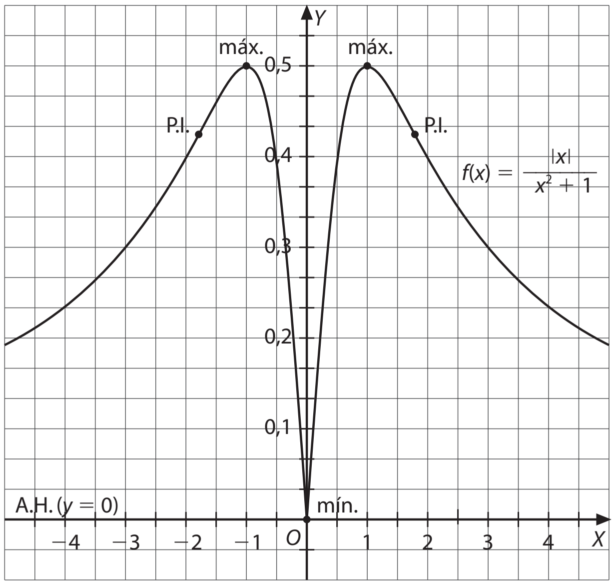
Finalmente, resumamos la información de la que disponemos para representar la gráfica de la función $f(x)$:

máximos absolutos en $\left(\pm 1, +\frac{1}{2}\right)$

mínimo absoluto en $(0, 0)$

puntos de inflexión en $\left(\pm\sqrt{3}, +\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

asíntota horizontal $y = 0$



28 **Razona si son derivables en el punto $x = 0$ cada una de las dos funciones siguientes:**

a) ***f:*** **$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) ***g:*** **$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Justifica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes. Para cada afirmación que consideres falsa pon un ejemplo ilustrativo.

c) ***h:*** **$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que: $\lim_{x\to a} h'(x) = \lim_{x\to a'} h'(x)$, entonces h es derivable en $x = a$.**

d) **Si una función real de variable real es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto.**

a) La función $f(x)$ no es derivable en el punto de abscisa $x = 0$, pues en dicho punto esta función ni siquiera es continua, condición necesaria, aunque no suficiente, para la derivabilidad. Si bien se cumplen los dos

primeros requisitos de continuidad, esto es, la función está definida en $x = 0$ y existe el límite en dicho punto:

1. $\exists\ f(0) = 1$

2. $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Falla, sin embargo, el tercero de ellos, pues el valor de la función en $x = 0$ no coincide con su límite en este punto:

3. $f(0) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

La función $f(x)$ no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en dicho punto.

b) En esta ocasión, la función $g(x)$ sí es continua en el punto de abscisa , pues la función está definida en $x = 0$, existe el límite en dicho punto y el valor de la función en $x = 0$ coincide con su límite en este punto:

1. $\exists\ g(0) = 0$

2. $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = 0\end{array}\right. \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

3. $g(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

No obstante, la función $h(x)$ no es derivable en el punto de abscisa $x = 0$, ya que no existe el límite de las derivadas laterales en este punto:

$$g'(x) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} g'(x) = \lim_{x\to 0^\pm}\left[2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] =$$
$$= \lim_{x\to 0^\pm}\left[2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] - \lim_{x\to 0^\pm}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0 - ?$$

c) Que las derivadas laterales de una función $h(x)$ coincidan en el punto de abscisa $x = a$ no implica que $h(x)$ sea derivable en dicho punto, pues podría ocurrir que la función fuera discontinua en $x = a$. Por consiguiente, si la función $h(x)$ no es continua en $x = a$, no puede ser derivable en ese punto. Por ejemplo, la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

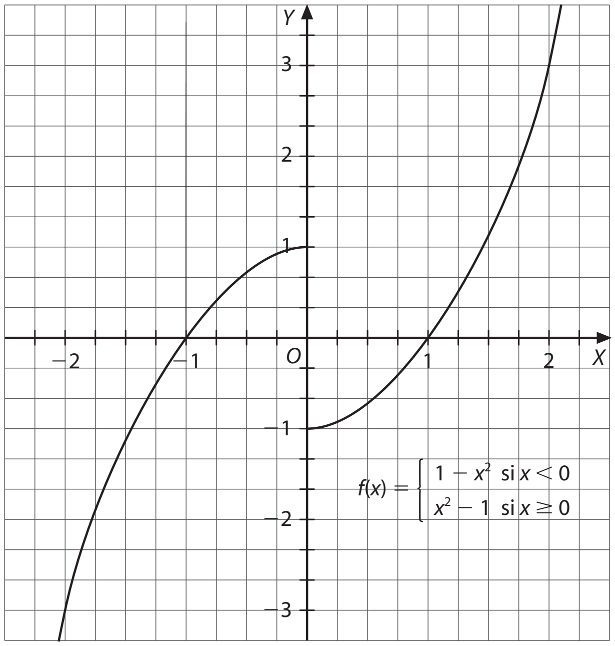
verifica, ciertamente, que sus derivadas laterales en coinciden, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x) = 0$$

No obstante, como $h(x)$ no es continua en $x = 0$, ya que:

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 - x^2) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - 1) = -1\end{array}\right. \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} h(x)$

tampoco podrá ser derivable en dicho punto.



d) Que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en dicho punto, pues la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para la derivabilidad. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$, que podemos escribir así:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en el punto de abscisa $x = 0$, pues

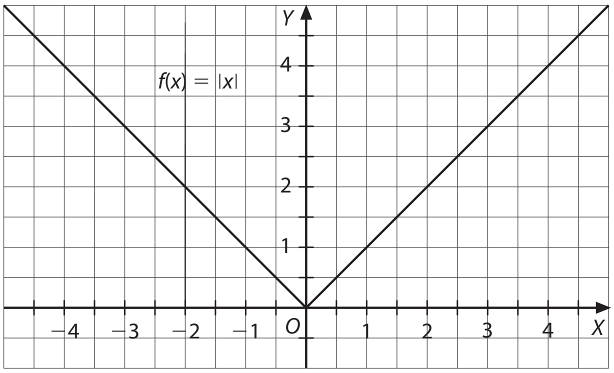
1. $\exists\ f(0) = 0$

2. $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

3. $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

mas no es derivable en este punto, ya que sus derivadas laterales en $x = 0$ no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$$



29 **Razona si son derivables en el cero cada una de las siguientes funciones de variable real:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$

Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.

c) **Para cualquier función polinómica de segundo grado existe un punto tal que la recta tangente a la función en ese punto es una recta paralela al eje de abcisas.**

d) **Si $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifican que $h'(x) = g'(x)$, entonces $h(x) = g(x)$**

a) Veamos, en primer lugar, si la función $f(x)$ es continua en el punto de abscisa $x = 0$:

1. $\exists\, f(0) = 2$

2. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+3) = 3 \end{cases}\right. \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

La función $f(x)$ no es continua en $x = 0$ y tampoco será derivable en dicho punto, ya que la continuidad es una condición necesaria, aunque no suficiente, para la derivabilidad.

b) Antes de nada, adviértase que la función $g(x)$ solo está definida si el radicando es positivo, esto es, $x^3 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2\ (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, luego Dom $f(x) = [-1, \infty)$. Comprobemos ahora si esta función es continua en el punto de abscisa $x = 0$, el cual se halla dentro del dominio de la función:

1. $\exists\, g(0) = 0$

2. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x^3 + x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^3 + x^2} = 0 \end{cases}\right. \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

3. $g(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Por consiguiente, la función $g(x)$ es continua en $x = 0$. Pasemos ahora a ver si sus derivadas laterales en dicho punto existen y si ambas coinciden:

$$g'(x) = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}} =$$

$$= \frac{3\cancel{x}(x+2)}{2\cancel{x}\sqrt{x+1}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} g'(x) = 3$$

En conclusión, la función $g(x)$ es derivable en el punto $x = 0$.

c) Toda función polinómica es continua y derivable, por lo que podemos asegurar que existe una recta tangente a la función en cualquiera de sus puntos. Una función polinómica de segundo grado tiene como gráfica una parábola cuyo vértice es el extremo absoluto de la función (mínimo absoluto si se trata de una parábola abierta hacia arriba o máximo absoluto en el caso de una parábola abierta hacia abajo). En este punto, la recta tangente a la parábola es, en efecto, paralela al eje *OX*. Para demostrar este hecho de forma analítica, basta con probar que la primera derivada de una función polinómica de segundo grado se anula en un punto en el cual la pendiente de la función es nula y, por tanto, la recta tangente es horizontal. Consideremos la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su primera derivada es $f'(x) = 2ax + b$, que se anula en el punto de abscisa $x = -b/2a$. Como $f''(x) = 2a$, este punto es máximo absoluto de $f(x)$ si $a > 0$, o mínimo absoluto de $f(x)$ si $a > 0$. En cualquier caso, en el punto $x = -b/2a$ la pendiente de $f(x)$ es nula y la recta tangente a la función es paralela al eje de abscisas.

d) Es falso que dos funciones sean idénticas si sus primeras derivadas son iguales. Tomemos, por ejemplo, $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = x^2 - 3x - 6$. La primera derivada de ambas funciones es $f'(x) = g'(x) = 2x - 3$; sin embargo, son funciones distintas.

30 **Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^3 + 3x^2$.**

a) **Dibuja la gráfica de la función *f*.**

b) **Dibuja la gráfica de la función *g* en el intervalo $[-3, 1]$, determinando previamente sus puntos de corte con los ejes y con la función *f*, sus extremos relativos (máximos y mínimos) y su curvatura.**

c) **Calcula el área de los recintos limitados entre las gráficas de las dos funciones en el intervalo $[-3, 1]$**

a) y ***b)*** Como son polinomios, ambas funciones son continuas y derivables en todo su dominio de definición, esto es, en toda la recta real.

La gráfica de la función $f(x)$ es una recta de pendiente positiva que corta a los ejes OX y OY en los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 3)$, respectivamente.

La función $g(x)$ es un polinomio cúbico cuyo recorrido es $(-\infty, +\infty)$; cortará al eje OX en uno, dos o, a lo sumo, tres puntos; puede que no tenga ningún extremo o puede que tenga dos (máximo y mínimo relativos); y tendrá, seguramente, un punto de inflexión. Veamos dónde corta al eje OX la gráfica de la función $g(x)$:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte de esta función con el eje OX son $(-3, 0)$ y $(0, 0)$. El último también es punto de corte con el eje OY.

Los extremos de la función $g(x)$ podrán encontrarse donde se anule la primera derivada:

$$g'(x) = 3x^2 + 6x = x(3x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

La segunda derivada de esta función, $g''(x) = 6x + 6$, evaluada en estos puntos es:

$$g''(x_2 = 0) = +6 > 0, g''(x_3 = -2) = -6 < 0$$

Esto nos indica que $x_2 = 0$ corresponde a un mínimo relativo cuyo valor es $f(x_2 = 0) = 0$, y $x_3 = -2$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es:

$$f(x_3 = -2) = 4$$

Por consiguiente, la función $g(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-2, 0)$.

El punto de inflexión se halla donde la segunda derivada se anula:

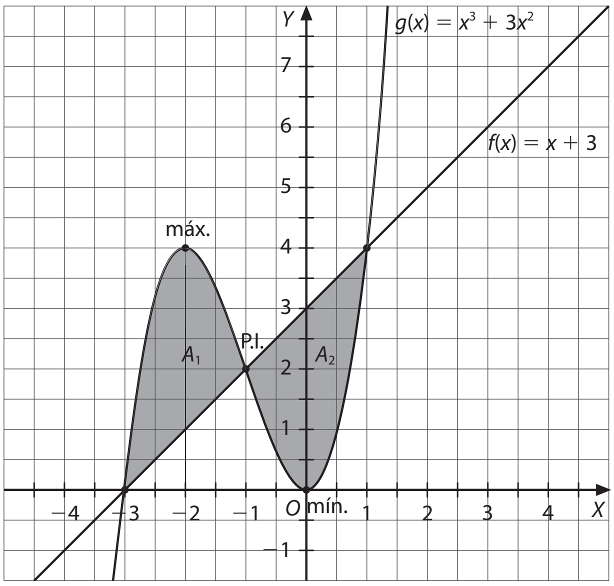
$$g''(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_4 = -1$$

que es, en efecto, un punto de inflexión, pues la tercera derivada, $g'''(x) = 6$, es distinta de 0. El valor de la función en este punto es $f(x_4 = -1) = 2$. La función es, entonces, abierta hacia abajo en $(-\infty, -1)$ y abierta hacia arriba en $(-1, +\infty)$.

Calculemos ahora los puntos de corte de la función $f(x)$ con la función $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + 3 = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -3, x_4 = -1, x_5 = +1$$

En definitiva, tenemos, por un lado, que la recta $f(x)$ pasa por los puntos $(-3, 0)$ y $(0, 3)$. Por otro lado, la curva $g(x)$ corta al eje OX en $(-3, 0)$ y $(0, 0)$; posee un máximo relativo en $(-2, -4)$, un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un punto de inflexión en $(-1, -2)$. Por último, ambas funciones se cortan en los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 2)$ y $(1, 4)$. Con toda esta información podemos representar la gráfica de ambas funciones en el intervalo solicitado, así como los recintos por ellas delimitados, cuyas áreas evaluaremos en el siguiente apartado.



c) Como ambas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, lo son en el intervalo $[-3, 1]$, por lo que podemos calcular el área comprendida entre ellas mediante integrales definidas y aplicando la regla de Barrow. En el intervalo $(-3, -1)$ la función $g(x)$ es mayor que la función $f(x)$, pues la gráfica de aquella queda por encima de la de esta. Por el contrario, en el intervalo $(-1, 1)$ es la gráfica de $f(x)$ la que está por encima de la de $g(x)$, luego aquí $f(x)$ es mayor que la función $g(x)$. Así pues, las áreas, A_1 y A_2, de los dos recintos se calculan de la siguiente manera:

$$A_1 = \int_{-3}^{-1} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-3}^{-1} [x^3 + 3x^2 - (x+3)]dx =$$
$$= \int_{-3}^{-1} [x^3 + 3x^2 - x - 3]dx =$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-3}^{-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) =$$
$$= -\cancel{\frac{80}{4}} + \frac{8}{2} + \cancel{20} = 4\ u^2$$

$$A_2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{+1} [x + 3 - (x^3 + 3x^2)]dx =$$
$$= \int_{-1}^{+1} [-x^3 - 3x^2 + x + 3]dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{+1} =$$
$$= \left(-\cancel{\frac{1}{4}} - 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + 3\right) - \left(-\cancel{\frac{1}{4}} + 1 + \cancel{\frac{1}{2}} - 3\right) =$$
$$= -2 + 6 = 4\ u^2$$

Esto es, ambas áreas son idénticas, como es lógico, por la simetría de los recintos delimitados. El área total, A, comprendidda entre las gráficas de ambas funciones es, finalmente, $A = A_1 + A_2 = 8\ u^2$.

31 Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

a) **Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.**

b) **Calcular: $\int f(x)\mathrm{d}x$**

a) Las dos primeras derivadas de la función $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, debidamente simplificadas, son:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3},\quad f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$$

Los extremos de la función $f(x)$ se encontrarán donde la primera derivada se anule:

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

La segunda derivada evaluada en este punto es:

$$f''\left(x = \sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{6\ln\sqrt{\mathrm{e}} - 5}{\sqrt{\mathrm{e}^4}} = \frac{6\ln \mathrm{e}^{1/2} - 5}{\mathrm{e}^2} =$$

$$= \frac{6\,\frac{1}{2}\ln \mathrm{e} - 5}{\mathrm{e}^2} = \frac{6\,\frac{1}{2} - 5}{\mathrm{e}^2} = \frac{3 - 5}{\mathrm{e}^2} = -\frac{2}{\mathrm{e}^2} < 0$$

lo cual nos indica que $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $f\left(x = \sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(0, \sqrt{\mathrm{e}}\right)$ y decreciente en la semirrecta $\left(\sqrt{\mathrm{e}}, \infty\right)$, así que podemos asegurar que el punto $\left(\sqrt{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ es, además, un máximo absoluto.

El punto $x = 0$ se halla excluido del dominio de esta función racional por un doble motivo: el logaritmo presente en su numerador tiende a $-\infty$ y el denominador tiende a 0. Está claro, por lo tanto, que la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota vertical, si bien solo por la derecha, de ecuación $x = 0$, ya que:

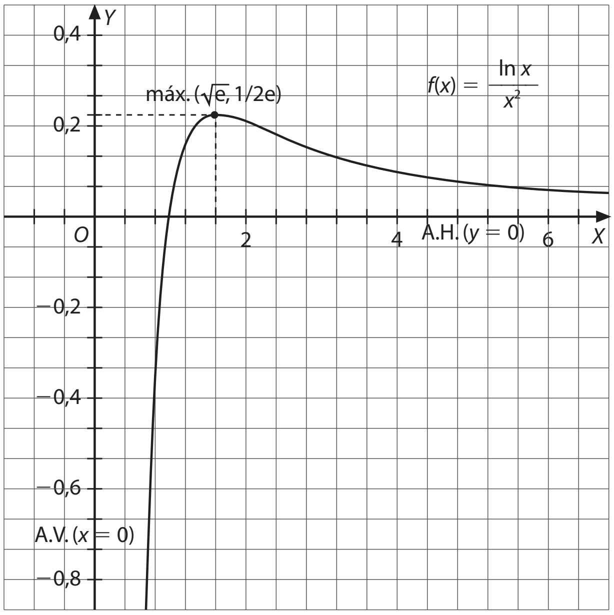
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Además, en el infinito el término cuadrático del denominador de esta función crece mucho más deprisa que el logaritmo de su numerador. Por ello, la gráfica de la función $f(x)$ tendrá, asimismo, una asíntota horizontal, aunque solo por la derecha, de ecuación $y = 0$, puesto que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \left[\text{Indeterminación } \frac{+\infty}{+\infty}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Como hay una asíntota horizontal, la gráfica de $f(x)$ no puede tener ninguna asíntota vertical.



b) Empleando el método de integración por partes podemos hallar la integral solicitada:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x^{-2}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{(-x^{-1})}_{v} - \int \underbrace{(-x^{-1})}_{v}\underbrace{x^{-1}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - x^{-1} + C =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1 + \ln x}{x} + C$$

32 Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen}^2(2x)}{x^3 + x^2}$.

Daremos con el límite solicitado por aplicación reiterada de la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}^2(2x)}{x^3 + x^2} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\,\mathrm{sen}(2x)\cos(2x)}{3x^3 + 2x^2} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8\cos^2(2x) - 8\,\mathrm{sen}^2(2x)}{6x + 2} =$$

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8\,[\cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x)]}{2\,(3x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\,[\cos^2(2x) - \text{sen}^2(2x)]}{3x+1} = 4$$

33 **Dada** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,(x^2)}{x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ **se pide:**

a) **Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función** $f(x)$**.**

b) **Calcular** $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)\,dx$

a) Ambos trozos de la función $f(x)$ son continuos y derivables en sus respectivos dominios de definición; por tanto, los problemas de continuidad y derivabilidad solo pueden darse en el punto de unión de ambos trozos, esto es, en $x = 0$. Analicemos, en primer lugar, si esta función es continua en dicho punto:

1. $\exists\, f(0) = 0$

2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 2x) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x\cos(x^2)}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

3. $f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$

Por consiguiente, la función $f(x)$ es continua en el punto de abscisa $x = 0$. Así pues, comprobaremos ahora si también es derivable en este punto, esto es, si sus derivadas laterales existen y coinciden:

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x - 2 = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2\cos(x^2) - \text{sen}\,(x^2)}{x^2} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} [2x^2\,\text{sen}\,(x^2) + \cos(x^2)] = 1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f'(x) = 0$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ no es derivable en el punto de abscisa $x = 0$. En conclusión, podemos decir que la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) La integral requerida es:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)\,dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 \frac{\text{sen}\,(x^2)}{x}\,dx =$$

$$= \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\,\text{sen}\,(x^2)\,dx$$

Como producto y composición de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, el integrando es, asimismo, continuo en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto, también lo será, en particular, en el intervalo de integración $\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}\right)$. Así, podemos emplear la regla de Barrow para dar con el valor de esta integral definida:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)\,dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x\,\text{sen}\,(x^2)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} 2x\,[-\text{sen}\,(x^2)]\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\cos(x^2)\Big]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\sqrt{2\pi}^2\right)\right] - \left[\cos\left(\sqrt{\pi}^2\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\pi) = -\frac{1}{2}[1 - (-1)] =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

34 **Calcular las asíntotas de la función** $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$**.**

Se trata de una función $f(x)$ racional polinómica cuyo denominador no se anula para ningún valor real de la variable independiente x, puesto que $x^2 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \Rightarrow 4x^2 + 1 \neq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Así pues, tenemos que Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y que la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, de lo cual se deduce que su gráfica carece de asíntotas verticales. Por otro lado, como el grado del polinomio que figura en el numerador es igual al grado del polinomio que aparece en el denominador, es evidente que la gráfica de $f(x)$ tendrá una asíntota horizontal que, en este caso, tiene como ecuación $y = 1$, ya que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2+1} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \dfrac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4 - \dfrac{4}{x} + \cancel{\dfrac{1}{x^2}}}{4 + \cancel{\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{4 - 0^{\pm}}{4} = 1^{\mp}$$

Dado que hay una asíntota horizontal, no es posible que haya ninguna asíntota oblicua.

35 Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x = 0$ la función $f(x)$ es continua, pues el denominador de $\dfrac{1-\cos x}{x}$ tan solo se anula en $x = 0$, valor para el cual la función es nula. Por lo tanto, los problemas de continuidad podrán presentarse únicamente en $x = 0$. Veamos si la función $f(x)$ es continua en dicho punto:

1. $\exists\, f(0) = 0$
2. $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \dfrac{1-\cos x}{x} = \left[\text{Indeterminación } \dfrac{0}{0}\right]^{L'H} =$
   $= \lim_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0$
3. $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$

Luego la función $f(x)$ es continua en el punto de abscisa $x = 0$ y, por consiguiente, lo es en todo $\mathbb{R}$.

36 Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)}$.

Esta integral puede calcularse utilizando el método de las fracciones simples, ya que en el numerador no aparece la derivada del denominador ni un múltiplo de esta. El integrando se puede expresar del siguiente modo:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow 1 = A(x+1) + Bx \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Si evaluamos esta última expresión en $x = 0$ y $x = -1$, obtenemos, respectivamente, el valor de los coeficientes A y B:

$$x = 0 \Leftrightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Leftrightarrow B = -1$$

Por lo tanto, el integrando puede ser descompuesto así:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

y la integral queda, entonces, de esta manera:

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

37 Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$.

a) **Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f. Esbozar la gráfica de f.**

b) **Probar que existe un punto $\left[c \in \dfrac{1}{e^2}, 1\right]$ tal que $f(c) = 0$.**

a) Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \; f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Los extremos de la función $f(x)$ podrán hallarse donde se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

La segunda derivada de esta función evaluada en dicho punto es $f''(x = 1) = -1 < 0$, lo cual indica que $x = 1$ corresponde con un máximo relativo cuyo valor es $f(x = 1) = 1$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y decreciente en la semirrecta $(1, \infty)$, así que podemos asegurar que el punto $(1, 1)$ es, además, un máximo absoluto.

Dado que $f''(x) \neq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, la función $f(x)$ carece de puntos de inflexión. Por otro lado, como $f''(x) < 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ es abierta hacia abajo en todo su dominio, es decir, en $(0, \infty)$.

La gráfica de $f(x)$ posee una asíntota vertical de ecuación $x = 0$, aunque solo por la derecha, pues:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2 - x + \ln x) = 2 - 0 + (-\infty) = -\infty$$

Veamos si la gráfica de la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (2 - x + \ln x) =$$

$$= [\text{Indeterminación } -\infty + \infty]$$

mas como el término lineal, $-x$, tiende a $-\infty$ más rápido de lo que el término logarítmico, $\ln x$, tiende a ∞, tenemos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ y, por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ no posee ninguna asíntota horizontal.

Comprobemos, asimismo, si existe alguna asíntota oblicua, $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2 - x + \ln x}{x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{-\infty}{+\infty}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-1 \cancel{\frac{1}{x}}}{1} = -1$$

luego podría haber una asíntota oblicua de pendiente $m = -1$. Pero ello no es suficiente, ya que hemos de obtener, asimismo, la ordenada en el origen:

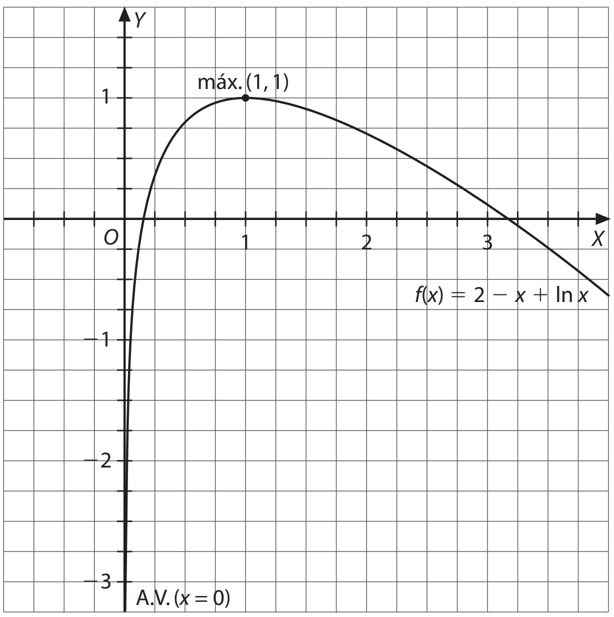
$$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x - mx)) = \lim_{x\to +\infty} (2 \cancel{- x} + \ln x + \cancel{x}) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (2 + \ln x) = +\infty$$

En conclusión, la gráfica de la función $f(x)$ tampoco posee ninguna asíntota oblicua.

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

Con toda esta información podemos, finalmente, esbozar la gráfica de esta función.



b) Sabemos que la función $f(x)$ es continua en todo su dominio, por ser suma y composición de funciones continuas en $(0, \infty)$, así que también lo será, en particular, en el intervalo cerrado $[1/e^2, 1]$. Dado que:

$$f(1/e^2) = 2 - \frac{1}{e^2} + \ln\frac{1}{e^2} = 2 - \frac{1}{e^2} + \ln e^{-2} =$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{e^2} - \cancel{2} = -\frac{1}{e^2} < 0$$

y

$$f(1) = 2 - 1 + \cancel{\ln 1} = 1 > 0$$

el valor de esta función adopta signos opuestos en los extremos de dicho intervalo. Si esto es así, el teorema de Bolzano nos asegura que existe al menos un punto de abscisa $c \in (1/e^2, 1)/f(c) = 0$, puesto que desde $x = 1/e^2$ hasta $x = 1$ esta función continua ha de cruzar, necesariamente, el eje OX. Este hecho se aprecia en la gráfica de $f(x)$ esbozada en el apartado anterior.

38 **Calcular los valores del número real *a* sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8$.**

Calculemos el límite en función del número real a:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax} - a}{2x} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a^2e^{ax}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} = 8 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = 8 \Leftrightarrow a = \pm 4$$

39 **Calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9 - (x-1)^2}}$.**

Una sencilla manipulación nos revela que esta integral es inmediata y de tipo arco seno:

$$\int\frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx = \int\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx =$$

$$= \int\frac{\overbrace{\tfrac{1}{3}}^{f'(x)}}{\sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}_{f(x)}}}\,dx = \text{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

40 **Calcula los siguiente límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2}\left(\frac{2x}{\pi} + \cos(x)\right)^{\frac{1}{\cos(x)}}$

Aplicaremos, en cada caso, los métodos adecuados para resolver las indeterminaciones que vayan apareciendo:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 - 8x^2 + 7x}{x^2 - x} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x^2 - 8x + 7)}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 1} = \frac{7}{-1} = -7$$

b) $$\lim_{x\to \pi/2}\left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x)\right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = [\text{Indeterminación } 1^{\infty}] =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\left\{\left[\frac{2x}{\pi} + \cos(x) - 1\right]\frac{1}{\cos(x)}\right\}}$$

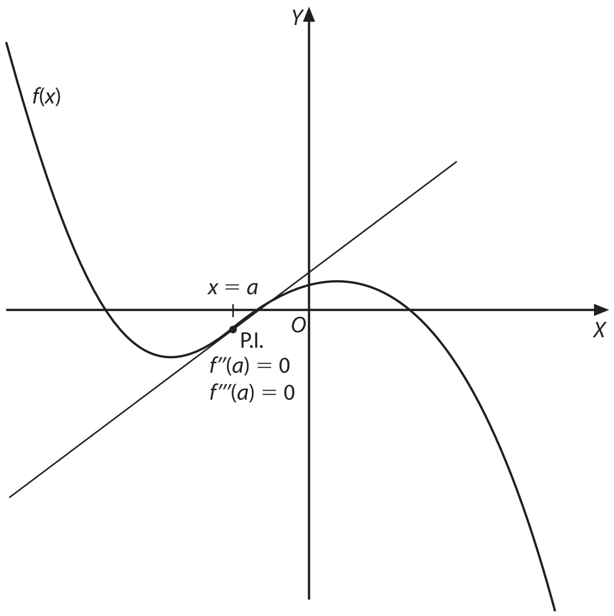
$$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\frac{2x}{\pi} + \cos(x) - 1}{\cos(x)}} = e^{\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H}} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\frac{2}{\pi} - \text{sen}(x)}{-\text{sen}(x)}} =$$

$$= e^{\frac{\frac{2}{\pi} - 1}{-1}} = e^{1 - \frac{2}{\pi}}$$

41 **Definición de punto de inflexión de una función. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 1$.**

Una función $f(x)$ posee un punto de inflexión (*P.I.*) en el punto de abscisa $x = a$ si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$. En un punto de inflexión cambia la curvatura de la función: la función

pasa de estar abierta hacia arriba ($f''(x < a) > 0$) a estarlo hacia abajo ($f''(x > a) < 0$), o viceversa. Además, en un punto de inflexión la recta tangente a la función atraviesa, de lado a lado, la gráfica de la misma.



La función $f(x) = (x^2 - a)e^x + bx$ es suma, producto y composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real, por lo que ella misma será, en consecuencia, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Sus tres primeras derivadas resultan ser:

$$f'(x) = (x^2 + 2x - a)e^x + b,\ f''(x) = (x^2 + 4x + 2 - a)e^x,$$
$$f'''(x) = (x^2 + 6x + 6 - a)e^x$$

Si esta función ha de tener un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, entonces se ha de verificar:

$$f'(x = 1) = 0 \Leftrightarrow (3 - a)e + b = 0 \Leftrightarrow ea - b = 3e$$
$$f''(x = 1) > 0 \Leftrightarrow (7 - a)e > 0 \Leftrightarrow a < 7$$

Por otro lado, si $f(x)$ debe poseer un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$, ha de cumplirse:

$$f''(x = 0) = 0 \Leftrightarrow 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$$
$$f'''(x = 0) \neq 0 \Leftrightarrow 6 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6$$

Luego, en efecto, para $a = 2 \neq 6$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$. Además, para $a = 2 < 6$ la función $f(x)$ tendrá un mínimo relativo en $x = 1$ si se verifica que $2e - b = 3e \Leftrightarrow b = -e$. Así pues, la función $f(x)$ queda de la siguiente manera:

$$f(x) = (x^2 - 2)e^x - ex$$

Puede comprobarse que esta función posee un mínimo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en $x = 0$.

42 **Calcula la integral** $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx$

Para calcular la integral indefinida de esta función racional polinómica, efectuaremos primero la división indicada, ya que no parece haber ninguna simplificación de factores y el grado del polinomio que figura en el numerador es mayor que el grado del polinomio que hay en el denominador:

$$\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}\right) dx =$$
$$= \int (2x + 1)\, dx + \int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

La primera integral es inmediata:

$$\int (2x + 1)\, dx = x^2 + x + C$$

Para efectuar la segunda integral aplicaremos el método de las fracciones simples, pues comprobamos que en el numerador no aparece la derivada del denominador ni un múltiplo de esta. Escribiremos esta integral de la manera siguiente:

$$\int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} dx = 2\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx =$$
$$= 2\int \frac{x}{(x - 3)(x - 2)} dx$$

Así pues:

$$\frac{x}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = A(x - 2) + B(x - 3)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Si evaluamos esta última expresión en $x = 3$ y $x = 2$, obtenemos, respectivamente, el valor de los coeficientes A y B:

$$x = 3 \Leftrightarrow A = 3$$
$$x = 2 \Leftrightarrow B = -2$$

Por lo tanto, el integrando puede ser descompuesto así:

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3}{x - 3} - \frac{2}{x - 2}$$

y, entonces, la segunda integral queda de este modo:

$$2\int \frac{x}{(x - 3)(x - 2)} dx = 2\int \left(\frac{3}{x - 3} dx - \frac{2}{x - 2} dx\right) =$$
$$= 2\left(3\int \frac{1}{x - 3} dx - 2\int \frac{1}{x - 2} dx\right) =$$
$$= 2\,(3 \ln |x - 3| - 2 \ln |x - 2|) + C' =$$
$$= 6 \ln |x - 3| - 4 \ln |x - 2| + C'$$

En conclusión, la integral da como resultado:

$$\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6}\,dx =$$
$$x^2 + x + 6 \ln |x - 3| - 4 \ln |x - 2| + C''$$

43 **Calcula la integral definida $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x)dx$**

Calcularemos primero la integral indefinida a través del método de integración por partes, el cual habremos de aplicar dos veces:

$$I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{[-\cos(x)]}_{v} - \int \underbrace{[-\cos(x)]}_{v}\underbrace{e^x\,dx}_{du} =$$

$$= -e^x \cos(x) + \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos(x)\,dx}_{dv} =$$

$$= -e^x \cos(x) + \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{du} =$$

$$= e^x[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] - \underbrace{\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx}_{I} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^x[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2}e^x[\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C$$

Dado que el integrando es una función continua en todo $\mathbb{R}$, lo será, en concreto, en el intervalo de integración $[0, \pi]$. Podemos, en consecuencia, aplicar la regla de Barrow para evaluar, finalmente, la integral definida:

$$\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}(x) - \cos(x))\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen}\pi - \cos\pi)\right] - \left[\frac{1}{2}e^0(\operatorname{sen}0 - \cos 0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{\pi}[(0 - (-1)] - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(0 - 1) = \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

44 **Dadas las funciones $f(x) = \ln(1 - x^2)$ y $g(x) = \ln(1 + x^2)$, se pide:**

a) **Determina el dominio de cada una de ellas.**

b) **Estudia si dichas funciones tiene puntos de inflexión.**

a) Ambas funciones son logarítmicas, por lo que solo estarán definidas para aquellos valores de la variable independiente, x, que hagan que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo. En el caso de $f(x) = \ln(x^2 - 1)$, dado que:

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$$

entonces:

$$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty) = \mathbb{R} - [-1, +1]$$

Por otro lado, para $g(x) = \ln(x^2 - 1)$, como $x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$x^2 + 1 \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R}, \text{luego } x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

y, por lo tanto:

$$\text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$$

b) Para determinar si estas funciones logarítmicas tienen algún punto de inflexión, comprobaremos si sus segundas derivadas se anulan en algún punto. La dos primeras derivadas de $f(x)$ son:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},\ \ f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

Dado que $x^2 + 1 = 0$ carece de soluciones reales, la segunda derivada de esta función no se anula para ningún valor real de x. Por consiguiente, la función $f(x)$ no posee ningún punto de inflexión.

Por otro lado, las dos primeras derivadas de $g(x)$ son:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1},\ \ g''(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

Veamos dónde se anula la segunda derivada de $g(x)$:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Como la tercera derivada de esta función:

$$g'''(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

es, claramente, distinta de 0 para $x = \pm 1$, podemos asegurar, entonces, que la función $g(x)$ posee un par de puntos de inflexión: en $(-1, \ln 2)$ y en $(+1, \ln 2)$.

45 **Determina los valores de los parámetros *a, b* $\in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (ax^2 + bx)\,e^{-x}$ tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 3$ y además pase por el punto $(1, -1/e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 0$.**

En primer lugar, si la función $f(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ debe pasar por el punto $(1, -1/e)$, tenemos:

$$f(1) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow (a + b)e^{-1} = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b)\cancel{\frac{1}{e}} = -\cancel{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow a + b = -1$$

Esta función es suma, producto y composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real, por lo que será continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Sus dos primeras derivadas son:

$$f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b]e^{-x}$$
$$f''(x) = [ax^2 + (b - 4a)x + 2(a - b)]e^{-x}$$

Si la función $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$, entonces se ha de verificar:

$$f'(x = 3) = 0 \Leftrightarrow [-9a + 3(2a - b) + b]e^{-3} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(3a + 2b)e^{-3} = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0$$
$$f''(x = 3) \neq 0 \Leftrightarrow [9a + 3(b - 4a) + 2(a - b)]e^{-3} \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -a + b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq b$$

Por lo tanto, los parámetros reales a y b deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a + \ \ b = -1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}, \text{con } a \neq b$$

las cuales son satisfechas para $a = 2$ y $b = -3$. Así pues, con estos valores la función $f(x)$ es:

$$f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x}$$

Puede comprobarse que esta función pasa por el punto $(1, -1/e)$ y posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$.

Como ya hemos dicho, la función $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su primera derivada es:

$$f'(x) = (-2x^2 + 7x - 3)e^{-x}$$

Podemos afirmar, por tanto, que existe una recta tangente a esta función en cada uno de sus puntos. En concreto, en $x = 0$, la pendiente, m, de la recta tangente será:

$$m = f'(x = 0) = -3e^0 = -3 \cdot 1 = -3$$

Como el valor de la función $f(x)$ en $x = 0$ es:

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

la recta tangente, $y = -3x + n$, habrá de pasar, además, por el punto de tangencia $(0, 0)$. De aquí obtenemos la ordenada en el origen, n:

$$0 = -3 \cdot 0 + n \Rightarrow n = 0$$

En consecuencia, la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = -3x$.

46 **Dada la función $f(x) = (x + a)\,\text{sen}(x)$, donde a es un número real, se sabe que la integral definida $\int_0^{\pi} f(x)dx$ es tres veces el valor de la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. Calcula el valor de a.**

Según el enunciado del problema, tenemos una función $f(x) = (x + a)$ sen (x) que verifica la siguiente igualdad:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 3\,f'(0)$$

Calculemos, en primer lugar, la integral indefinida de la función $f(x)$ a través de la integración por partes:

$$\int \underbrace{(x + a)}_{u}\,\underbrace{\text{sen}\,(x)\,dx}_{dv} =$$

$$= \underbrace{(x + a)}_{u}\,\underbrace{[-\cos\,(x)]}_{v} - \int \underbrace{[-\cos\,(x)]}_{u} \cdot \underbrace{1 \cdot dx}_{du} =$$
$$= -(x + a)\cos\,(x) + \int \cos\,(x)\,dx =$$
$$= \text{sen}\,(x) - (x + a)\cos\,(x) + C$$

Como el integrando es una función continua en todo $\mathbb{R}$, lo será también en el intervalo de integración $[0, \pi]$. En consecuencia, podemos aplicar la regla de Barrow para evaluar ahora la integral definida:

$$\int_0^{\pi} (x + a)\,\text{sen}\,(x)\,dx = [\text{sen}\,(x) - (x + a)\cos\,(x)]_0^{\pi} =$$
$$= [\text{sen}\,\pi - (\pi + a)\cos\,\pi] - [\text{sen}\,0 - (0 + a)\cos\,0] =$$
$$= [0 - (\pi + a)\,(-1)] - [0 - a \cdot 1] = \pi + a + a = 2a + \pi$$

Por otro lado, la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \text{sen}\,(x) + (x + a)\cos\,(x)$$

que en el punto de abscisa vale:

$$f'(0) = \text{sen}\,0 + (0 + a)\cos\,0 = 0 + a \cdot 1 = a$$

Así pues, tenemos:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 3f'(0) \Leftrightarrow 2a + \pi = 3a \Leftrightarrow a = \pi$$

y, finalmente, la función $f(x)$ será:

$$f(x) = (x + \pi)\,\text{sen}\,(x)$$

47 **Definición de primitiva de una función. Sabiendo que $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de la función $f(x)$:**

a) **Comprueba que $f(x)$ es una función creciente en $\mathbb{R}$.**

b) **Calcula el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.**

La función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ si y solo si:

$$F'(x) = f(x)$$

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo será cualquier otra función de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante, puesto que $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Por esta razón, la integral indefinida de $f(x)$ se define como el conjunto de todas las primitivas posibles de $f(x)$. Así, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde C es la constante de integración. En definitiva, la integración es el procedimiento inverso a la derivación:

$$F(x) \underset{\int f(x)\,dx}{\overset{F'(x)}{\rightleftarrows}} f(x)$$

a) Si $f(x)$ es una función creciente en $\mathbb{R}$, entonces se habrá de verificar que $f'(x) \geq 0$. Como sabemos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, por la definición de

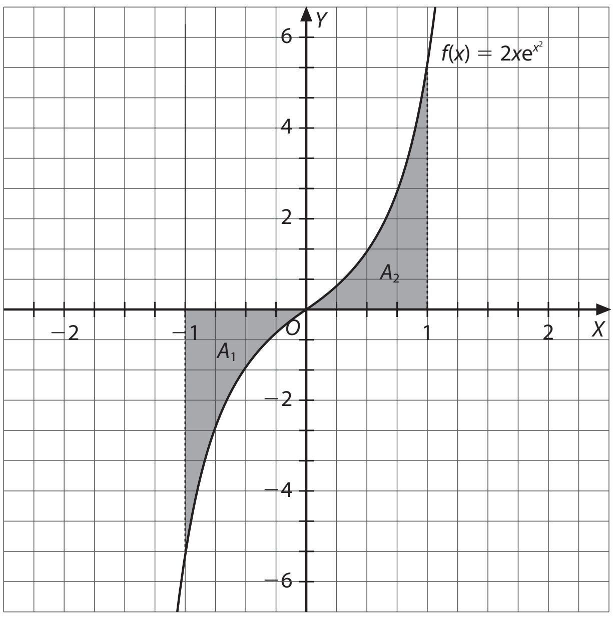
primitiva tenemos que $f(x) = F'(x)$. Si derivamos ambos miembros de esta expresión, resulta que $f'(x) = F''(x)$. Por lo tanto:

$$f'(x) = F''(x) = \left(e^{x^2}\right)'' = 2(2x^2 + 1)e^{x^2}$$

Como $x^2 \geq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

entonces $2x^2 + 1 \geq 1$ y $e^{x^2} \geq 1\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, por lo cual podemos afirmar que $f'(x) > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Esto es, la función $f(x)$, no solo es creciente, sino que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

b) De la definición de primitiva, sabemos que $f(x) = F'(x) = 2xe^{x^2}$. Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$, es continua (pues resulta del producto y composición de funciones continuas) y, como acabamos de ver, estrictamente creciente. Además, $f(x)$ es una función con simetría impar (esto es, $f(-x) = -f(x)$) que pasa por los puntos $(-1, -2e)$, $(0, 0)$ y $(1, 2e)$. Con esta información podemos esbozar la gráfica de la función $f(x)$ y hacernos una idea del recinto cuya área hemos de calcular.



El área, A, de este recinto tiene, por lo tanto, dos contribuciones, A_1 y A_2, que hemos de calcular por separado. Como la función $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo es, en particular, en el intervalo $[-1, 1]$, así que podemos calcular estas áreas mediante dos integrales definidas y por aplicación del teorema de Barrow:

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{0} 2xe^{x^2}\,dx\right| = \left|\left[e^{x^2}\right]_{-1}^{0}\right| =$$
$$= \left|e^0 - e^1\right| = |1 - e| = e - 1$$

$$A_2 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = (e^1 - e^0) = e - 1$$

Como era de esperar, ambas áreas son idénticas, debido a la simetría de la función. El área total será, por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 = e - 1 + e - 1 = 2(e - 1)\ u^2$$

48 **Hallad** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

Calculemos, en primer lugar, la integral indefinida. Para ello, realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x\,dx \end{cases}$$

De este modo, la integral se puede calcular de manera inmediata:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2}^{t-1} \cdot \overbrace{2xdx}^{dt}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{t}} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t}}\,dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \sqrt{t}dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \int t^{1/2}dt - 2\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} - 2\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + C$$

Dado que la función del integrando es continua en todo $\mathbb{R}$, también lo es, en particular, en el intervalo de integración $\left[0, \sqrt{3}\right]$. Así pues, según la regla de Barrow la integral indefinida es:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(\sqrt{3}^2+2\right)^3} - 2\sqrt{\sqrt{3}^2+1}\right] -$$

$$- \left[\frac{2}{3}\sqrt{(0^2+1)^3} - 2\sqrt{0^2+1}\right] =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 2\sqrt{4}\right] - \left[\frac{2}{3}\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right] =$$

$$= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

49 **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x-1}{3+x^2}$**, hallad su dominio, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento, sus máximos y sus mínimos. Haced una representación gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.**

La función $f(x)$ es una función racional polinómica cuyo denominador no se anula para ningún valor real de la variable independiente x, ya que $x^2 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, luego

$x^2 + 3 \geq 3\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ y, por consiguiente $x^2 + 3 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Así pues, podemos afirmar que el dominio de esta función será toda la recta real, esto es, Dom $f(x) = \mathbb{R}$, y, por lo tanto, su gráfica no tendrá asíntotas verticales. Además, la función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio de definición. Como el grado del denominador es superior al grado del numerador, la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, por lo cual no puede haber asíntotas oblicuas. Los límites en el infinito son los siguientes:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{1}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{3}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = \frac{0^{\pm}}{1+0} = 0^{\pm}$$

Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son, debidamente simplificadas:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2},\quad f''(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 + 9x + 3)}{(x^2+3)^3}$$

Donde se anule la primera derivada podrán encontrarse los extremos de la función:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +3 \end{cases}$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = -1) = \frac{2[(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 3]}{((-1)^2+3)^3} =$$

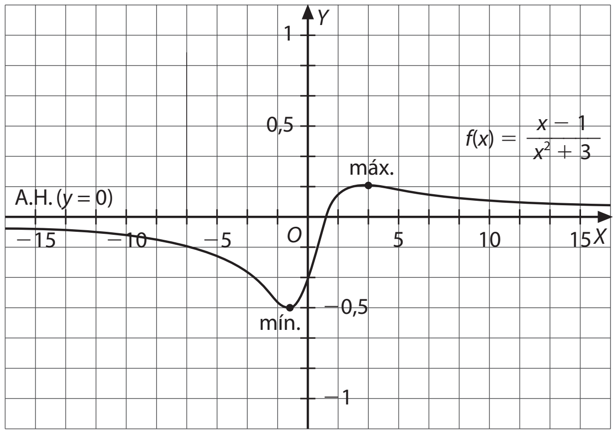
$$= \frac{2(-1 - \cancel{3} + 9 + \cancel{3})}{4^3} = \frac{16}{52} = \frac{1}{4} > 0$$

$$f''(x_2 = +3) = \frac{2[3^3 - 3^2 - 9 \cdot 3 + 3]}{(3^2+3)^3} =$$

$$= \frac{2(\cancel{27} - 9 - \cancel{27} + 3)}{12^3} = \frac{-12}{12^3} = \frac{1}{12^2} = -\frac{1}{144} < 0$$

Luego $x_1 = -1$ corresponde a un mínimo relativo cuyo valor es $f''(x_1 = -1) = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = +3$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $f(x_2 = +3) = +\frac{1}{6}$. Por otro lado, como la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, estos extremos han de ser, además, absolutos. Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-1, +3)$ y decreciente en $(+\infty, -1) \cup (+3, +\infty)$.

En definitiva, sabemos que la función $f(x)$ alcanza su mínimo absoluto en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ y su máximo absoluto en el punto $\left(+3, +\frac{1}{6}\right)$, y que su gráfica tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$. Además, la función $f(x)$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y $(1, 0)$. Con toda esta información podemos, por último, esbozar su gráfica.



50 **Hallad $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.**

Calculemos, en primer lugar, la integral indefinida. Para ello, realizaremos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x dx \end{cases}$$

De este modo, la integral se puede calcular de manera inmediata:

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2}^{t-1} \cdot \overbrace{2xdx}^{dt}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{t}} = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{t}}\,dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \sqrt{t}dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \int t^{1/2}dt - 2\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} - 2\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + C$$

Dado que la función del integrando es continua en todo $\mathbb{R}$, también lo es, en particular, en el intervalo de integración $\left[0, \sqrt{3}\right]$. Así pues, según la regla de Barrow la integral indefinida es:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{\left(\sqrt{3}^2+2\right)^3} - 2\sqrt{\sqrt{3}^2+1}\right] -$$

$$- \left[\frac{2}{3}\sqrt{(0^2+1)^3} - 2\sqrt{0^2+1}\right] =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 2\sqrt{4}\right] - \left[\frac{2}{3}\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right] =$$

$$= \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}$$

51 **Consideramos la función $f(x) = 2$ arctg $x - x$. Calculad, su dominio, sus intervalos de crecimiento, sus máximos y sus mínimos. Calculad $f(0)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.**

Dibujad una gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.

Por un lado, sabemos que el término lineal, $-x$, que aparece en la función $f(x)$ está definido para todo $\mathbb{R}$. Por otro lado, debido a que la tangente de un ángulo (restringido este entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$, pues no se trata de una función biyectiva) puede adoptar cualquier valor real, su función inversa, es decir, la función arco tangente, puede ser calculada para cualquier valor real. Así pues, como suma y composición de funciones definidas en toda la recta real, el dominio de la función $f(x)$ será, asimismo, toda la recta real, esto es, Dom $f(x) = \mathbb{R}$. Por consiguiente, su gráfica no tendrá asíntotas verticales. Además, la función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio de definición, es decir, en todo $\mathbb{R}$. Los límites en el infinito que se piden son los siguientes:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [2\text{arctg}(x) - x] = 2\text{arctg}(+\infty) - (+\infty) =$$

$$= 2\left(+\frac{\pi}{2}\right) - \infty = \pi - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [2\text{arctg}(x) - x] = 2\text{arctg}(-\infty) - (-\infty) =$$

$$= 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \infty = -\pi + \infty = +\infty$$

Debido al término lineal, $-x$, esta función tiende a $\mp\infty$ para $x \to \pm\infty$ de forma lineal, por lo cual podríamos preguntarnos si posee alguna asíntota oblicua de ecuación $y = mx + n$. Comprobémoslo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\text{arctg}(x) - x}{x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{\mp\infty}{\pm\infty}\right]^{L'H} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2} - 1}{1} =$$

$$= \frac{\frac{2}{+\infty} - 1}{1} = \frac{0^+ - 1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} [2\text{arctg}(x) - \cancel{x} + \cancel{x}] =$$

$$= 2\text{arctg}(\pm\infty) = 2\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\pi$$

Luego, en efecto, la gráfica de la función $f(x)$ posee dos asíntotas oblicuas, una para $x \to +\infty$ y otra para $x \to -\infty$, cuyas ecuaciones son:

$$y = -x + \pi \qquad \text{para } x \to +\infty$$

$$y = -x - \pi \qquad \text{para } x \to -\infty$$

Por lo tanto, no podrá haber ninguna asíntota horizontal.

Analicemos ahora los extremos y el crecimiento de esta función. Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son, debidamente simplificadas, las siguientes:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Donde se anule la primera derivada podrán encontrarse los extremos de la función:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

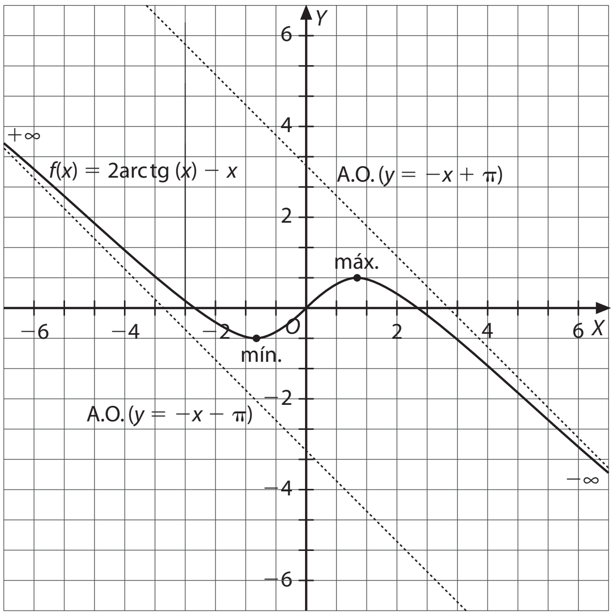
La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f'(x_1 = -1) = \frac{+4}{4} = +1 > 0,$$

$$f''(x_2 = +1) = \frac{-4}{4} = -1 < 0$$

Luego $x_1 = -1$ corresponde a un mínimo relativo cuyo valor es $f(x_1 = -1) = 1 - \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = +1$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $f(x_2 = +1) = \frac{\pi}{2} - 1$. Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-1, +1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$.

En definitiva, sabemos que la función $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en el punto $\left(-1, 1 - \frac{\pi}{2}\right)$ y un máximo relativo en el punto $\left(+1, \frac{\pi}{2} - 1\right)$, y que su gráfica tiene dos asíntotas oblicuas de ecuación $y = -x \pm \pi$. Además, como $f(0) = 2$ arctg$(0) - 0 = 0$, la función $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas, esto es, por el punto $(0, 0)$. Con toda esta información podemos, por último, esbozar su gráfica.



52 **Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, determinad a, b y c para que se cumpla que $f(0) = f(-1) = 1$, $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2$.**

Si la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha de verificar que $f(0) = f(-1) = 1$, tenemos:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$f(-1) = 1 \Leftrightarrow a - b + \cancel{1} = \cancel{1} \Leftrightarrow a = b$$

Por otro lado, como:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} = \left(-\frac{a}{3} + \frac{a}{2} - 1\right) - 0 = \frac{a-6}{6}$$

entonces:

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 2 \Leftrightarrow \frac{a-6}{6} = 2 \Leftrightarrow a = 18$$

Por lo tanto, $a = b = 18$ y $c = 1$, con lo cual la función $f(x)$ que buscamos es:

$$f(x) = 18x^2 + 18x + 1$$

53 **Buscad una función, que llamamos $f(x)$, que pase por el punto $(1, 3)$ y cuya derivada sea la función $x \ln x$.**

Calculad el dominio de $f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Si la función que buscamos, $f(x)$, tiene como derivada $f'(x) = x\ln(x)$, entonces $f(x)$ es una primitiva de $f'(x)$. En consecuencia:

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int x\ln(x)\mathrm{d}x$$

Esta integral indefinida puede calcularse utilizando el método de la integración por partes:

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\,\underbrace{x\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \underbrace{\ln(x)}_{u}\,\underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{v} = \int \underbrace{\frac{1}{2}x^{\cancel{2}}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Por otro lado, si la función $f(x)$ ha de pasar por el punto $(1, 3)$, entonces:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{4} + C = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4} + C = 3 \Leftrightarrow C = \frac{13}{4}$$

En definitiva, la función buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{4} = \frac{1}{2}x^2\left[\ln(x) - \frac{1}{2}\right] + \frac{13}{4}$$

A causa del término logarítmico, la función $f(x)$ sólo está definida para aquellos valores de la variable independiente, x, que hagan que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo, esto es, $x > 0$, luego:

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = (0, +\infty)$$

El límite en el infinito de esta función es:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}x^2\left[\ln(x) - \frac{1}{2}\right] + \frac{13}{4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(+\infty)\cdot\left(+\infty - \frac{1}{2}\right) + \frac{13}{4} = +\infty\cdot(+\infty) = +\infty$$

54 **Sea $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-x}$. Calculad su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus puntos de inflexión. Calculad $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Dibujad una gráfica de la función que refleje los datos obtenidos.**

La función $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$ es el producto de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas y definidas en toda la recta real. Así pues, $f(x)$ es continua y esta definida en toda la recta real, por lo que $\mathrm{Dom}\ f(x) = \mathbb{R}$. Sus tres primeras derivadas son las siguientes:

$$f'(x) = (-x^3 + 3x^2)\mathrm{e}^{-x},\ \ f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)\mathrm{e}^{-x},$$
$$f'''(x) = (-x^3 + 9x^2 - 24x + 6)\mathrm{e}^{-x}$$

Los extremos serán aquellos en los que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = (-x^3 + 3x^2)\mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(-x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = 0) = 0,\ \ f''(x_2 = 3) = -\frac{9}{\mathrm{e}^3} < 0$$

luego $x_1 = 0$ podría corresponderse con un punto de inflexión, mientras que en el punto de abscisa $x_2 = 3$ hay

un máximo relativo cuyo valor es $f(x_2 = 3) = 27/e^3$. Por lo tanto, la función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$, y el punto $(3, 27/e^3)$ será su máximo absoluto.

Los puntos de inflexión se encontrarán donde se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 3 + \sqrt{3} \\ x_4 = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Puede comprobarse que la tercera derivada evaluada en dichos puntos es distinta de 0, luego se tratan, en efecto, de puntos de inflexión. El valor de la función en estos puntos es:

$$f(x_1 = 0) = 0,\ f\left(x_3 = 3 + \sqrt{3}\right) = \frac{2\left(27 + 15\sqrt{3}\right)}{e^{3+\sqrt{3}}}$$

$$f(x_4 = 3 - \sqrt{3}) = \frac{2\left(27 - 15\sqrt{3}\right)}{e^{3-\sqrt{3}}}$$

Como es en $x_2 = 3$ donde se encuentra el máximo, es aquí donde la función es abierta hacia abajo. Si tenemos en cuenta que la curvatura cambia en cada punto de inflexión, concluimos que $f(x)$ ha de ser abierta hacia abajo en $(-\infty, 0) \cup \left(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}\right)$ y abierta hacia arriba en $\left(0, 3 - \sqrt{3}\right) \cup \left(3 + \sqrt{3}, \infty\right)$.

En definitiva, los puntos críticos de la función $f(x)$ son:

máximo absoluto: $(3, 27/e^3)$

puntos de inflexión: $(0, 0)$ y $\left(3 \pm \sqrt{3}, \dfrac{2\left(27 + 15\sqrt{3}\right)}{e^{3+\sqrt{3}}}\right)$

Los límites de esta función en el infinito son:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = +\infty \cdot e^{-\infty} =$$

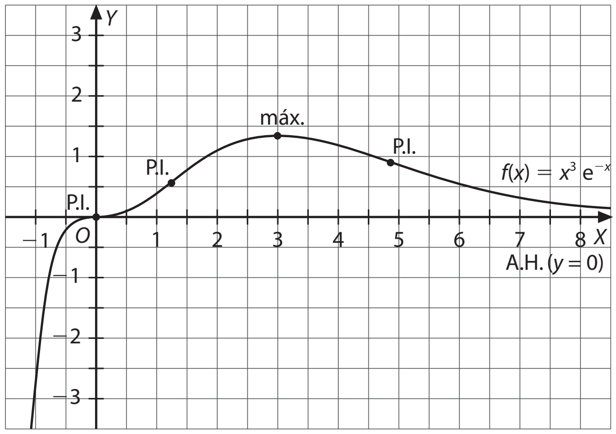
$$= [\text{Indeterminación } +\infty \cdot 0^+] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{+\infty}{+\infty}\right]^{L'H} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{+\infty}{+\infty}\right]^{L'H} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0^+$$

Del límite en $+\infty$ deducimos que la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal por la derecha de ecuación $y = 0$.

Con toda esta información, podemos, por último, esbozar la gráfica de la función $f(x)$.



55 **Estudiar los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

a) Este límite presenta una indeterminación de tipo $\infty - \infty$, mas como la función exponencial $f(x) = e^x$ crece en el infinito más rápido que cualquier función potencial $g(x) = x^n$, es evidente que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x > \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} (e^x - x^2) = \infty$. No obstante, si se desea, puede comprobarse este resultado:

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{x^2}\right)^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{2x}\right)^{L'H} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x}{2}\right) = \infty$$

b) Este límite presenta una indeterminación de tipo ∞/∞, pero como una función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 1$, crece en el infinito tanto más rápido cuanto mayor sea la base, es evidente que el límite pedido es nulo, pues en el denominador se encuentra la exponencial con base mayor y este crece en el infinito mucho más rápido que el numerador. Si se quiere calcular, se obtiene dicho resultado:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\dfrac{4^x}{6^x} + \dfrac{5^x}{6^x}}{\dfrac{3^x}{6^x} + \dfrac{6^x}{6^x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(\dfrac{4}{6}\right)^x + \left(\dfrac{5}{6}\right)^x}{\left(\dfrac{3}{6}\right)^x + \left(\dfrac{6}{6}\right)^x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + \left(\dfrac{5}{6}\right)^x}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{0 + 0}{0 + 1}\right) = 0$$

ya que $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ si $0 < a < 1$.

56 **Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = x(\ln(x))^2}$$

Siendo ln (*x*) el logaritmo neperiano de *x*.

Antes de calcular los extremos y puntos de inflexión, adviértase que la función $f(x) = x(\ln(x))^2$ solo está definida para valores de la variable independiente estrictamente positivos, ya que el logaritmo así lo exige: $\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$. Las tres primeras derivadas de la función, debidamente simplificadas, son:

$$f'(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2), \ f''(x) = 2\frac{\ln(x) + 1}{x},$$

$$f'''(x) = -\frac{2\ln(x)}{x^2}$$

Los posibles extremos serán aquellos en los que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \Rightarrow x_1 = e^0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ \ln(x) + 2 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -2 \Rightarrow x_2 = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \end{cases}$$

El signo de la segunda derivada en dichos puntos es:

$$f''(x_1 = 1) = 2\frac{\ln(1) + 1}{1} = 2 > 0$$

$$f''\left(x_2 = \frac{1}{e^2}\right) = 2\frac{\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) + 1}{\dfrac{1}{e^2}} = -2e^2 < 0$$

Por lo tanto, la función alcanza un mínimo en $x_1 = 1$, cuyo valor es $f(x_1 = 1) = 1(\ln(1))^2 = 0$; y un máximo en $x_2 = \frac{1}{e^2}$, cuyo valor es $f\left(x_2 = \frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2}\left(\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)\right)^2 = \frac{4}{e^2}$.

El posible punto de inflexión se encontrará donde se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = 2\frac{\ln(x) + 1}{x} = 0 \Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x^3 = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como la tercera derivada evaluada en dicho punto no se anula:

$$f''\left(x_3 = \frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)}{\dfrac{1}{e^2}} = 2e^2 \neq 0$$

podemos asegurar que, efectivamente, se trata de un punto de inflexión. En este punto de inflexión la función vale:

$$f\left(x_3 = \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

En conclusión, los puntos críticos de la función son los siguientes:

- mínimo relativo en (1,0)
- máximo relativo en $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$
- punto de inflexión en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

57 ***a)*** **Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1}$$

El eje *OX* y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

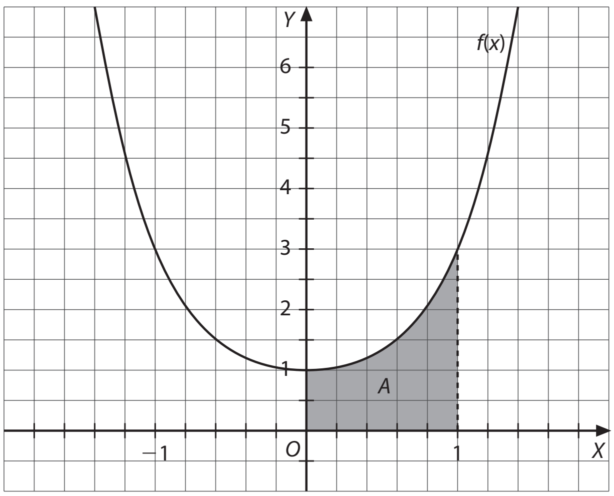
b) **Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado *a)* es mínima.**

Para cualquier valor de $c \neq 0$, la función $f(x)$ es una función polinómica de cuarto grado con simetría par, es decir, simétrica con respecto al eje *OY*, pues $f(-x) = f(x)$. Además, como c es estrictamente positivo, las dos ramas laterales serán ascendentes. Por otro lado, $f(x)$ no posee puntos de corte con el eje *OX*, pues puede comprobarse que la ecuación bicuadrada:

$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0$$

no posee soluciones reales para cualquier valor de $c > 0$. Así pues, si las ramas laterales son ascendentes y la función no corta al eje *OX*, la función $f(x)$ queda siempre por encima de dicho eje. Por último, para todo $c > 0$, es evidente que $f(x)$ pasa por el punto (0,1), que es su mínimo absoluto, único extremo que posee la función. Por tanto:

a) El área solicitada está por encima del eje *OX*, y podemos calcularla directamente según:



$$A = \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = F(1) - F(0)$$

La primitiva de $f(x)$ se calcula de manera inmediata:

$$F(x) = \int \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) dx = \frac{c}{5}x^5 + \frac{1}{3c}x^3 + x + K$$

Y, finalmente, el área resulta ser:

$$A = F(1) - F(0) = \left(\frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1 \right) u^2$$

b) Con el fin de hallar el valor de c para el cual el área es mínima, debemos optimizar la expresión anterior como si fuera una función de la variable c. Las dos primeras derivadas de la función $A(c) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$ son:

$$A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2},\ A''(c) = \frac{2}{3c^3}$$

Los posibles extremos son aquellos en los cuales se anule la primera derivada:

$$A'(c) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3c^2} = 0 \Rightarrow 3c^2 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = +\frac{1}{3}\sqrt{15} \\ c_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{15} \end{cases}$$

Como $c > 0$, la solución negativa, c_2, no es válida. Veamos el signo de la segunda derivada en la solución positiva, c_1, para comprobar si corresponde a un mínimo:

$$A''\left(c_1 = +\frac{1}{3}\sqrt{15} \right) > 0,\ A''\left(c_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{15} \right) < 0$$

En consecuencia, el área es mínima para el valor $c_1 = +\frac{1}{3}\sqrt{15}$.

58 Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)}$$

se pide:

a) **Dibujar la gráfica de *f*, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.**

b) **Calcular:**

$$\int_0^1 \boldsymbol{f(x)dx}$$

a) La función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$ es el producto de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas y definidas en toda la recta real. Por lo tanto, $f(x)$ será continua, estará definida en toda la recta real y, como no se hace infinita para ningún valor finito de la variable x, una gráfica de $f(x)$ carece de asíntotas verticales. Las tres primeras derivadas de la función, debidamente simplificadas, son:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1)^2,\ f''(x) = e^{-x}(x-1)(x-3),$$
$$f'''(x) = -e^{-x}(x^2 - 6x + 7)$$

Los posibles extremos serán aquellos en los que se anule la primera derivada:

$$f'(x) = -e^{-x}(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = +1$$

La segunda derivada evaluada en este punto es:

$$f''(x_1 = +1) = 0$$

luego no se trata de un máximo ni de un mínimo; podría ser, sin embargo, un punto de inflexión. La función $f(x)$ no posee ni máximos ni mínimos; como es continua, está definida en toda la recta real; y, además, la exponencial decreciente domina sobre el término polinómico. Es evidente que $f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{+1\}$. También podemos comprobar este hecho viendo que $f'(x) < 0\ \forall\ x \neq 1$.

Los posibles puntos de inflexión se encontrarán donde se anule la segunda derivada:

$$f''(x) = e^{-x}(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = +3 \end{cases}$$

Como la tercera derivada en dichos puntos es distinta de cero, se tratan, efectivamente, de puntos de inflexión. El valor de la función en dichos puntos es $f(x_1 = +1) = \frac{2}{e}$ y $f(x_2 = +3) = \frac{10}{e^3}$. En conclusión, los únicos puntos críticos de la función son:

- punto de inflexión en $\left(1, \frac{2}{e}\right)$
- punto de inflexión en $\left(3, \frac{10}{e^3}\right)$

Evaluemos la segunda derivada en un punto situado entre el 1 y el 3; por ejemplo, $f''(x = +2) = \frac{-1}{e^2} < 0$.

Esto nos indica que la función está abierta hacia abajo en el intervalo (1, 3), por lo que estará abierta hacia arriba en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Por último, la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota horizontal en $y = 0$ que lo es solo por la derecha, ya que:

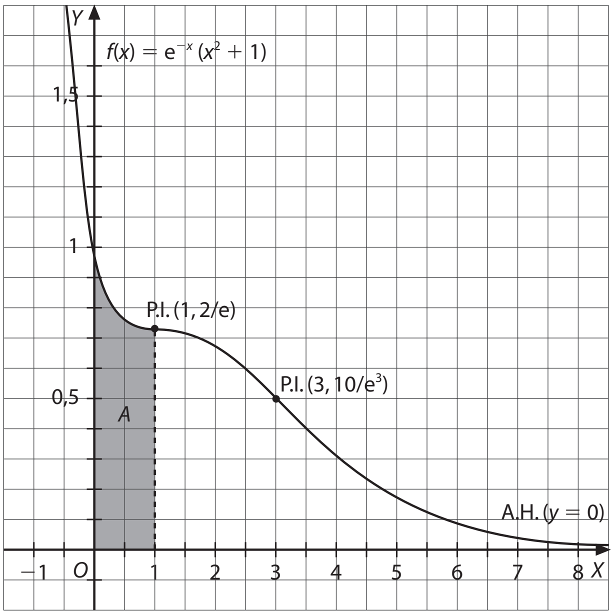
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x}(x^2 + 1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{e^x} \right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{e^x} \right]^{L'H} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{e^x} \right]^{L'H} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [e^{-x}(x^2 + 1)] = \infty$$

La gráfica de $f(x)$ carece, por tanto, de asíntotas oblicuas.

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)



b) Como $f(x)$ es estrictamente positiva en toda la recta real, lo es, en particular, en el intervalo (0, 1). Así pues, la integral que se solicita coincide con el área de la región comprendida entre la función, el eje *OX*, la recta $x = 0$ y la recta $x = 1$. Calcularemos la primitiva de $f(x)$ mediante el método de integración por partes:

$$F(x) = \int \underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = \underbrace{(x^2+1)}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\underbrace{2xdx}_{du} =$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + \int \underbrace{2x}_{u}\underbrace{e^{-x}dx}_{dv} =$$

$$= -(x^2+1)(-e^{-x}) + \underbrace{2x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\underbrace{2dx}_{du} =$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx =$$
$$= -(x^2+2x+3)e^{-x} + K$$

Y, finalmente, la integral definida es:

$$\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \left(-\frac{6}{e}\right) - (-3) = 3 - \frac{6}{e}$$

59 ***a)*** **Calcular:**

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

Donde ln (*x*) es un logaritmo neperiano de *x*.

b) **Utilizar el cambio de variable $x = e^t - e^{-t}$ para calcular:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

Indicación: Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

a) Calcularemos esta integral por partes:

$$\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\underbrace{x^3dx}_{dv} = \underbrace{\ln(x)}_{u}\underbrace{\frac{x^4}{4}}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^4}{4}}_{v}\underbrace{\frac{1}{x}dx}_{du} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^4\ln(x) - \int x^3dx\right] = \frac{1}{4}\left[x^4\ln(x) - \frac{x^4}{4}\right] + K =$$

$$= \frac{x^4}{4}\left[\ln(x) - \frac{1}{4}\right] + K$$

b) Apliquemos el cambio de variable propuesto:

$$x = e^t - e^{-t} \Rightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$$

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+(e^t+e^{-t})^2} =$$
$$= \sqrt{4+(e^t)^2+(e^{-t})^2-2e^te^{-t}} =$$
$$= \sqrt{4+e^{2t}+e^{-2t}-2} = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} =$$
$$= \sqrt{(e^t+e^{-t})^2} = (e^t+e^{-t})$$

Así pues, la integral quedará como

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})}\,dt =$$

$$= \int 1dt = t + K = \log\left(\frac{x+\sqrt{4+x^2}}{2}\right) + K$$

una vez deshecho el cambio de variable según la indicación del enunciado.

60 **Dada la función**

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4}$$

Se pide:

i) **Dominio y cortes con el eje x.**

ii) **Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).**

iii) **Asíntotas horizontales y oblicuas.**

iv) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.**

v) **Representación gráfica aproximada.**

i) La función:

$$f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2-4} = \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}$$

viene definida por una expresión racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = \pm 2$, no así el numerador. Por lo tanto, $\text{Dom } f(x) = \{x/x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Sus puntos de corte con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$\text{Eje } OX\text{: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow (4, 0) \end{cases}$$

$$\text{Eje } OY\text{: } f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

ii) Dado que la función es continua en su dominio de definición, esto es, en $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$, su gráfica sólo podrá tener asíntotas verticales en $x = \pm 2$. Calculemos los límites laterales de $f(x)$ en dichos puntos:

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{-6}{0^{\mp}} = $$
$$= 1 - (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\pm}} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) = 1 - \frac{6}{0^{\pm}} = $$
$$= 1 - (\pm\infty) = \mp\infty$$

Así pues, la gráfica de $f(x)$ tiene, en efecto, un par de asíntotas verticales en $x = \pm 2$, puntos en los cuales la función presenta discontinuidades inevitables de salto doblemente infinito.

iii) Como el grado del polinomio presente en el numerador es el mismo que el grado del polinomio que aparece en el denominador, la gráfica de la función $f(x)$ posee, asimismo, una asíntota horizontal. Calculemos los límites de esta función en el infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{3x}{x^2 - 4}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x^2 - 4} = 1 - \left[\text{Indeterminación } \frac{\pm\infty}{+\infty}\right] =$$

$$= 1 - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{4}{x^2}} = 1 - \lim_{x \to \pm\infty} = \frac{\frac{3x}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} =$$

$$= 1 - \frac{0^{\pm}}{1 - 0^{+}} = 1 - \frac{0^{\pm}}{1^{-}} = 1 - 0^{\pm} = 1^{\mp}$$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota horizontal, por ambos lados, de ecuación $y = 1$. Al tener una asíntota horizontal, no puede tener ninguna asíntota oblicua.

iv) La primera derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12}{(x^2 - 4)^2}$$

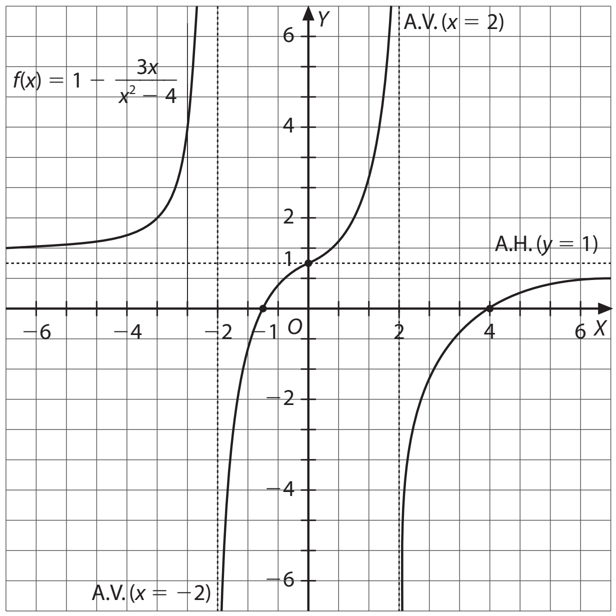
Dado que $3x^2 + 12 \neq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$, la derivada de esta función no se anula en ningún punto, luego $f(x)$ no posee extremos. Para analizar su crecimiento y decrecimiento evaluaremos la primera derivada en cada uno de los tres trozos de la función:

$$f'(x = \pm 3) = \frac{29}{25} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, -2) \cup (+2, +\infty)$$

$$f'(x = 0) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-2, +2)$$

Por consiguiente, la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio.

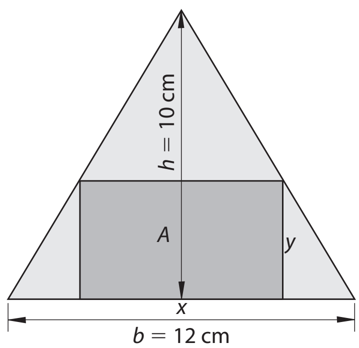
v) Con toda la información obtenida hasta ahora, podemos, finalmente, esbozar la gráfica de esta función:



61 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (correspondiente al lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales del triángulo. Calcular las dimensiones (base y altura) del rectángulo para que su área sea máxima.**

Denominemos x e y, respectivamente, a la base y a la altura del rectángulo inscrito en el triángulo isósceles. Así pues, el área de este rectángulo será:

$$A(x, y) = x \cdot y$$



Ambas variables son, lógicamente, positivas, esto es, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Además, como el triángulo isósceles en el cual se inscribe el rectángulo tiene 12 cm de base y 10 cm de altura, es evidente que $0 \leq x \leq 12$ y $0 \leq y \leq 10$. A medida que crece la base, x, del rectángulo, disminuye su altura, y, linealmente, de manera que si $x = 0$,

entonces $y = 10$, y si $x = 12$, entonces $y = 0$. En consecuencia, tenemos la siguiente relación lineal entre x e y:

$$y = 10 - \frac{10}{12}x = \frac{120 - 10x}{12} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Introduciendo esta relación en la expresión del área del rectángulo, resulta:

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{60 - 5x}{6}\right) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

función de una variable que debemos optimizar. Las dos primeras derivadas de esta función son:

$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6},\ A''(x) = -\frac{5}{3}$$

Los extremos posibles se localizarán donde se anule la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6} = 0 \Leftrightarrow 60 - 10x = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Como la segunda derivada es negativa para todo valor de x, este punto corresponde, en efecto, a un máximo. Por lo tanto, el rectángulo inscrito de mayor superficie posible tiene por base $x = 6$ cm y por altura $y = 5$ cm, y su área es $A = 30$ cm^2.

62 ***i)*** **Enunciar el teorema fundamental del cálculo.**

ii) **Calcular la integral** $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}dx$.

i) El teorema fundamental del cálculo integral afirma que si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y la función F viene definida en dicho intervalo como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

entonces F es derivable en el intervalo abierto (a, b) y se verifica que $F(x) = f(x)\ \forall\ x \in (a, b)$.

ii) Para calcular la integral indefinida de esta función racional polinómica, efectuaremos primero la división indicada, ya que el grado del polinomio que figura en el numerador es mayor que el grado del polinomio que hay en el denominador y no parece haber ninguna simplificación de factores:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2 - 2x + 1}\right)dx =$$

$$\int x dx - \int \frac{x}{x^2 - 2x + 1}dx$$

La primera integral es inmediata:

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Para efectuar la segunda integral aplicaremos el método de las fracciones simples, pues comprobamos que en el numerador no aparece la derivada del denominador ni un múltiplo de esta. Escribiremos dicha integral de la manera siguiente:

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1}dx = \int \frac{x}{(x - 1)^2}dx$$

Así pues:

$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = A(x - 1) + B\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Si evaluamos esta última expresión en $x = 1$ y, por ejemplo, en $x = 2$, obtendremos, respectivamente, el valor de los coeficientes B y A:

$$x = 1 \Leftrightarrow B = 1$$
$$x = 2 \Leftrightarrow A = 1$$

Por consiguiente, el integrando puede ser descompuesto de este modo:

$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

y la segunda integral queda así:

$$\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1}dx = \int \frac{x}{(x - 1)^2}dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}\right)dx =$$
$$= \int \frac{1}{x - 1}dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2}dx = \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C'$$

En conclusión, la integral da como resultado:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1}dx = \frac{1}{2}x^2 - \ln|x - 1| + \frac{1}{x - 1} + C''$$

63 **Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = 1 + \ln(x)$ y $g(x) = 1/x$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.**

La función logarítmica $f(x) = 1 + \ln(x)$ solo está definida en $(0, +\infty)$, corta al eje OX en el punto $(1/e, 0)$, no tiene ningún punto crítico ni asíntotas, y es creciente y abierta hacia abajo en todo su dominio. Por otro lado, la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola con dos ramas cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, no tiene puntos de corte con los ejes de coordenadas ni ningún punto crítico, es decreciente en todo su dominio, abierta hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba $(0, +\infty)$, y su gráfica posee dos asíntotas:

una vertical en $x = 0$, pues:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

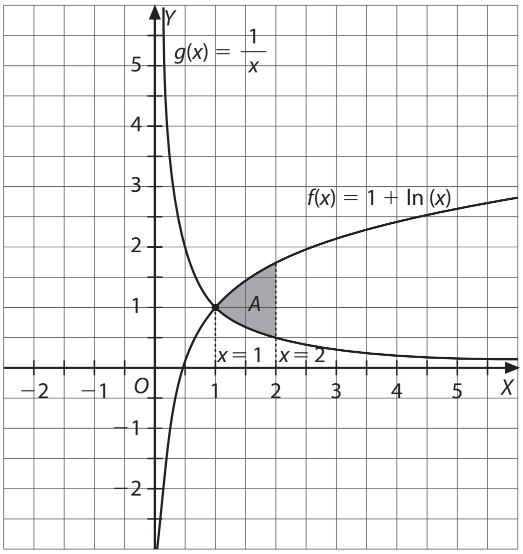
y otra horizontal de ecuación $y = 0$, ya que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$

Como:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

ambas funciones se cortan en el punto (1, 1). Podemos esbozar las gráficas de estas funciones, así como el recinto delimitado por ellas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.



En el intervalo que va desde $x_1 = 1$ hasta $x_2 = 2$ la función logarítmica está por encima de la hipérbola; por lo tanto, $f(x)$ es mayor que $g(x)$ en este intervalo. Además, ambas funciones son continuas en todo su dominio, por lo cual también son continuas, en particular, en dicho intervalo. Así pues, el área del recinto delimitado por sus gráficas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ puede calcularse mediante la siguiente integral definida aplicando la regla de Barrow:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[1 + \ln(x) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x$$

Obtengamos primero la integral indefinida:

$$\int \left[1 + \ln(x) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int \ln(x)\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

La primera y la última integral son inmediatas:

$$\int 1\mathrm{d}x = x + C_1$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C_2$$

La segunda no lo es, pero se puede obtener utilizando el método de integración por partes:

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = \int \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{1\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}v} = \underbrace{\ln(x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{v} \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}u} =$$

$$= x\ln(x) - \int 1\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C_3$$

Por lo tanto:

$$\int \left[1 + \ln(x) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x + \int \ln(x)\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \cancel{x} + x\ln(x) - \cancel{x} - \ln(x) + C_4 = x\ln(x) - \ln(x) + C_4 =$$

$$= (x - 1)\ln(x) + C_4$$

Y, finalmente, el área solicitada es:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[1 + \ln(x) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= [(x - 1)\ln(x)]_1^2 = [(2 - 1)\ln(2)] - [(1 - 1)\ln(1)] = \ln 2\ u^2$$

64 **Dada la función**

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{4 - x}}$$

Se pide:

i) **Dominio y cortes en el eje *x*.**

ii) **Asíntotas verticales (calculando los límites laterales).**

iii) **Asíntotas horizontales y oblicuas.**

iv) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos.**

v) **Representación gráfica aproximada.**

i) La función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x}$ viene definida por una expresión racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = 4$, no así el numerador. Por lo tanto, Dom $f(x) = \{x/4 - x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{4\}$. Esta función corta los ejes de coordenadas en el origen, ya que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow (0, 0)$ y $f(0) = 0 \Leftrightarrow (0, 0)$.

ii) Dado que la función es continua en su dominio de definición, esto es, en $\mathbb{R} - \{4\}$, su gráfica sólo podrá tener una asíntota vertical en $x = 4$. Calculemos los límites laterales de $f(x)$ en dicho punto:

$$\lim_{x\to 4^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to 4^{\pm}} \frac{x^2}{4 - x} = \frac{16}{0^{\mp}} = \mp\infty$$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ tiene, en efecto, una asíntota vertical en $x = 4$, punto en el cual la función presenta una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito.

iii) Como el grado del polinomio presente en el numerador es una unidad mayor que el grado del polinomio que aparece en el denominador, la gráfica de la función $f(x)$ posee, asimismo, una asíntota oblicua. Calculemos la pendiente, *m,* y la ordenada en el origen, *n,* de esta asíntota:

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4-x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{4}{x} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{x}} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{4-x} + x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{4x}{4-x}\right] = \left[\text{Indeterminación } \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{4}{x} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{\cancel{4}}{\cancel{x}} - 1} = \frac{4}{-1} = -4$$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota oblicua, por ambos lados, de ecuación $y = -x - 4$. Al tener esta asíntota oblicua, no puede tener ninguna asíntota horizontal.

iv) Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son, debidamente simplificadas:

$$f'(x) = \frac{x(8-x)}{(4-x)^2},\quad f''(x) = \frac{32}{(4-x)^3}$$

Donde se anule la primera derivada podrán encontrarse los extremos de la función:

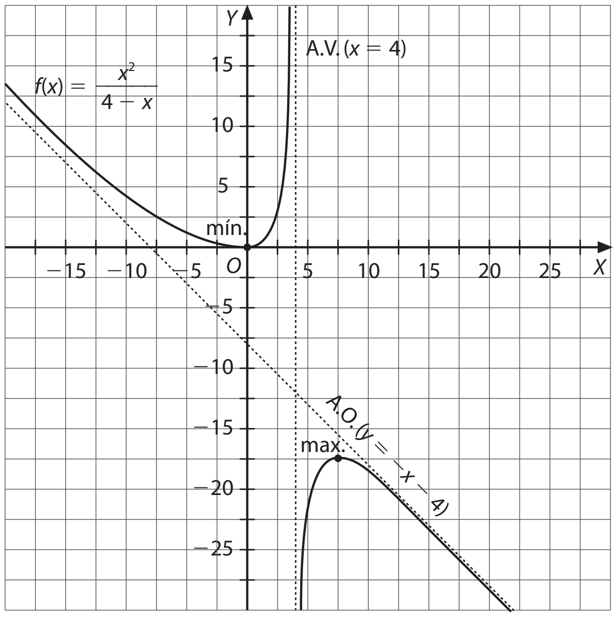
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(8-x)}{(4-x)^2} = 0 \Leftrightarrow x(8-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f''(x_1 = 0) = \frac{32}{64} = \frac{1}{2} > 0,\quad f''(x_2 = 8) = \frac{32}{-64} = -\frac{1}{2} < 0$$

Luego $x_1 = 0$ corresponde a un mínimo relativo cuyo valor es $f(x_1 = 0) = 0$, y $x_1 = 8$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $f(x_2 = 8) = -16$. Además, debido al comportamiento asintótico de la función en $\pm\infty$ y en $x = 4$, estos extremos no pueden ser absolutos. Por lo tanto, tenemos un mínimo relativo en el punto $(0, 0)$ y un máximo relativo en el punto $(8, -16)$. En consecuencia, la función $f(x)$ es creciente en $(0, 4) \cup (4, 8)$ y decreciente en $(-\infty, 4) \cup (8, +\infty)$.

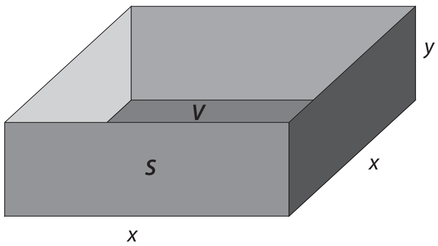
v) Finalmente, a partir de la información obtenida hasta ahora, podemos esbozar la gráfica de esta función.



65 **Se quiere construir una caja (sin tapadera) de base cuadrada y con un volumen de 250 cm^3. Calcule las dimensiones de la base y la altura de la caja para que su superficie sea mínima.**

Denominemos x e y, respectivamente, al lado de la base cuadrada y a la altura de la caja sin tapa que se desea construir. La superficie total, S, de esta caja será:

$$S(x, y) = x^2 + 4xy$$



Ambas variables deben ser, como es lógico, estrictamente positivas, es decir, $x > 0$ e $y > 0$. Además, como el volumen, V, de la caja debe ser de 250 cm^3, tenemos la siguiente relación entre las variables x e y:

$$V(x, y) = x^2 y = 250 \Leftrightarrow y = \frac{250}{x^2}$$

Si introducimos esta relación en la expresión de la superficie total de la caja, resulta:

$$S(x) = x^2 + 4\cancel{x}\frac{250}{x^{\cancel{2}}} = x^2 + \frac{1\,000}{x}$$

función de una sola variable que hemos de optimizar. Las dos primeras derivadas de esta función son:

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1\,000}{x^2},\quad S''(x) = 2 + \frac{2\,000}{x^3}$$

Los extremos posibles se localizarán donde se anule la primera derivada:

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 1\,000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{500} = 5\sqrt[3]{4}$$

La segunda derivada evaluada en este punto es:

$$S''\left(x = 5\sqrt[3]{4}\right) = 2 + \frac{2\,000}{\left(5\sqrt[3]{4}\right)^3} = 2 + \frac{2\,000}{500} = 2 + 4 = 6 > 0$$

luego se corresponde con un mínimo. La altura será:

$$y = \frac{250}{\left(5\sqrt[3]{4}\right)^2} = \frac{250}{25\sqrt[3]{16}} = \frac{10}{\sqrt[3]{2\cdot 8}} = \frac{10}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{5}{\sqrt[3]{2}} =$$

$$= \frac{5\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

En conclusión, la caja debe tener una base de $x = 5\sqrt[3]{4} \approx 7{,}94$ cm de lado y una altura de $y = 5\sqrt[3]{4}/2 \approx 3{,}97$ cm. La superficie total de esta caja es mínima e igual a:

$$S = \left(5\sqrt[3]{4}\right)^2 + 4\cdot\left(5\sqrt[3]{4}\right) + \left(\frac{5\sqrt[3]{4}}{2}\right) =$$

$$= \left(5\sqrt[3]{4}\right)^2 + 2\cdot\left(5\sqrt[3]{4}\right)^2 = 3\cdot\left(5\sqrt[3]{4}\right)^2 = 3\cdot 25\sqrt[3]{16} =$$

$$= 75\cdot 2\sqrt[3]{2} = 150\sqrt[3]{2} \approx 188{,}99 \text{ cm}^2$$

y su volumen será:

$$V = \left(5\sqrt[3]{4}\right)^2 \cdot \frac{5\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{\left(5\sqrt[3]{4}\right)^3}{2} \cdot \frac{125\cdot 4}{2} = 125\cdot 2 = 250 \text{ cm}^2$$

tal y como se pedía.

66 **Calcular la integral:**

$$\lim_{x\to+\infty} \int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$$

Para calcular la integral indefinida de esta función racional polinómica, en la cual no parece haber ninguna simplificación de factores, efectuaremos primero la división indicada, pues el grado del polinomio que figura en el numerador es mayor que el grado del polinomio que hay en el denominador:

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1} dx = \int\left(x + \frac{1-x}{x^2+1}\right)dx = \int\left(x + \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C$$

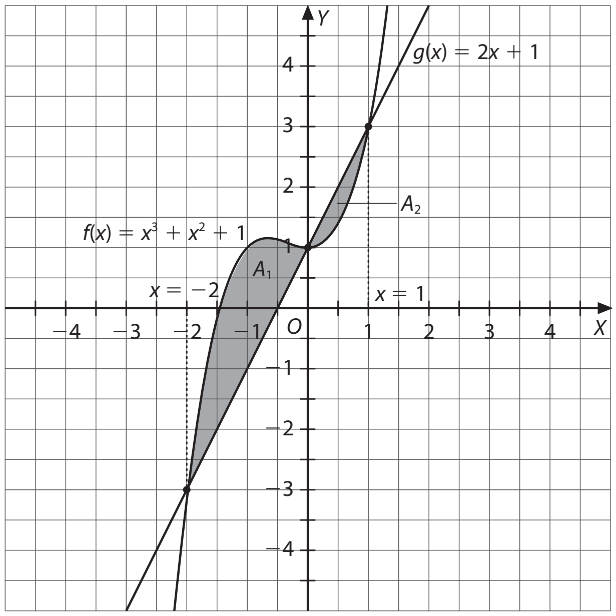
67 **Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.**

La función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ es un polinomio cúbico que corta al eje *OY* en el punto (0,1). Tiene un máximo relativo en $(-2/3, 31/27)$ y un mínimo relativo en (0,1). Por otro lado, la gráfica de la función $g(x) = 2x + 1$ es una recta de pendiente positiva que corta los ejes *OX* y *OY*, respectivamente, en los puntos $(-1/2, 0)$ y (0,1). Ambas funciones están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}$. Calculemos ahora los puntos de intersección de la función $f(x)$ y la función $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + x^2 \cancel{+1} = 2x \cancel{+1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +1 \end{cases}$$

Si, además, tenemos en cuenta que en $\pm\infty$ la función $f(x)$ tiende a $\pm\infty$ con más rapidez que la función $g(x)$, podemos ya esbozar las gráficas de ambas funciones, así como los recintos por ellas delimitados.



Como ambas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, lo son en el intervalo $[-2, 1]$, por lo que podemos calcular el área comprendida entre ellas mediante integrales definidas y aplicando la regla de Barrow. En el intervalo $(-2, 0)$ la función $f(x)$ es mayor que la función $g(x)$, pues la gráfica de aquella queda por encima de la de esta. Por el contrario, en el intervalo $(0, 1)$ es la gráfica de $g(x)$ la que está por encima de la de $f(x)$, luego aquí $g(x)$ es mayor que la función $f(x)$. Así pues, las áreas, A_1 y A_2, de los dos recintos se calculan de la siguiente manera:

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\cancel{4} - \frac{8}{3} - \cancel{4}\right) = \frac{8}{3}\ u^2$$

$$A_2 = \int_{x_2}^{x_3} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} (-x^3 - x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{1} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - 0 = \frac{5}{12}\ u^2$$

Por último, el área total, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}\ \mathrm{u}^2$$

68 **Calcula los siguientes límites:**

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ ***ii)*** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$

Para dar con los límites solicitados, resolveremos, en cada caso, las indeterminaciones que vayan apareciendo:

i)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} = \left[\text{Indeterminación } \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(\cancel{x}+1) - (\cancel{x}-1)}{(\cancel{x}+2) - (\cancel{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{(x+2)} + \sqrt{(x-2)}}{\sqrt{(x+1)} + \sqrt{(x-1)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1-x+1}{x+2-x+2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{Indeterminación } \frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x}}}{\sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + \cancel{\frac{2}{x}}} + \sqrt{1 - \cancel{\frac{2}{x}}}}{\sqrt{1 + \cancel{\frac{1}{x}}} + \sqrt{1 - \cancel{\frac{1}{x}}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1} + \sqrt{1}}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}$$

ii)

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\left(\ln\sqrt{1-\cos x}\right)'}{[\ln(1-\cos x)]'} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\cos x}} \cdot \operatorname{sen} x}{\frac{1}{1-\cos x} \cdot \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{2\cancel{(1-\cos x)}}}{\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cancel{1-\cos x}}} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

69 **Halla el máximo relativo, el mínimo relativo y la asíntota oblicua de la función**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}}$$

La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$ está definida por una expresión racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = 1$, no así el numerador. Así pues, Dom $f(x) = \{x/x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$. Como la función es continua en su dominio de definición, es decir, en $\mathbb{R} - \{1\}$, su gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to1^{\pm}} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$$

En dicho punto la función presenta una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito. Además, dado que el grado del polinomio presente en el numerador es una unidad mayor que el grado del polinomio que aparece en el denominador, la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota oblicua cuya pendiente, m, y cuya ordenada en el origen, n, son:

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-2}{x^2-x} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} - \frac{2}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \cancel{\frac{2}{x}} + \cancel{\frac{2}{x^2}}}{1 - \cancel{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+2x-2}{x^2-x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{3x-2}{x-1}\right] = \left[\text{Indeterminación } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \cancel{\frac{2}{x}}}{1 - \cancel{\frac{1}{x}}} = \frac{3}{1} = 3$$

Por lo tanto, la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota oblicua por ambos lados cuya ecuación es $y = x + 3$. Al tener esta asíntota oblicua, no puede tener ninguna asíntota horizontal.

Las dos primeras derivadas de la función $f(x)$ son, debidamente simplificadas:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},\quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

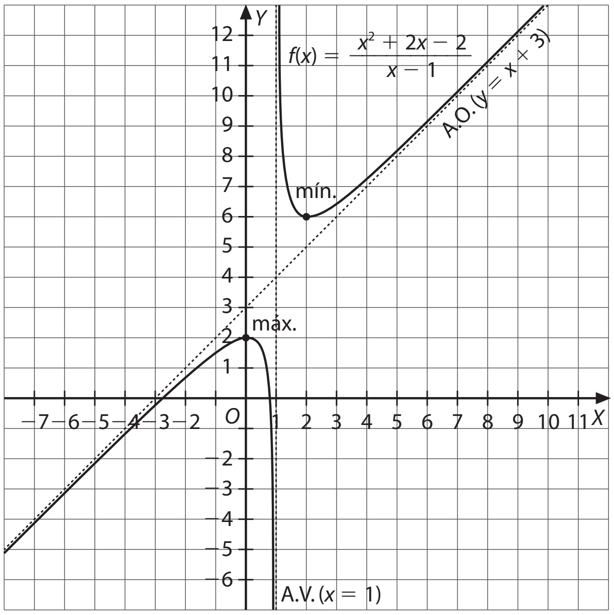
Donde se anule la primera derivada podrán encontrarse los extremos de la función:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

La segunda derivada evaluada en estos puntos es:

$$f'(x_1 = 0) = \frac{2}{-1} = -1 < 0,\quad f''(x) = (x_2 = 2) = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

Luego $x_1 = 0$ corresponde a un máximo relativo cuyo valor es $f(x_1 = 0) = 2$, y $x_2 = 2$ a un mínimo relativo cuyo valor es $f(x_2 = 2) = 6$. Por otro lado, debido al comportamiento asintótico de la función en $\pm\infty$ y en $x = 1$, estos extremos no pueden ser absolutos. En conclusión, la función $f(x)$ posee un máximo relativo en el punto (0, 2) y un mínimo relativo en el punto (2, 6); y será creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

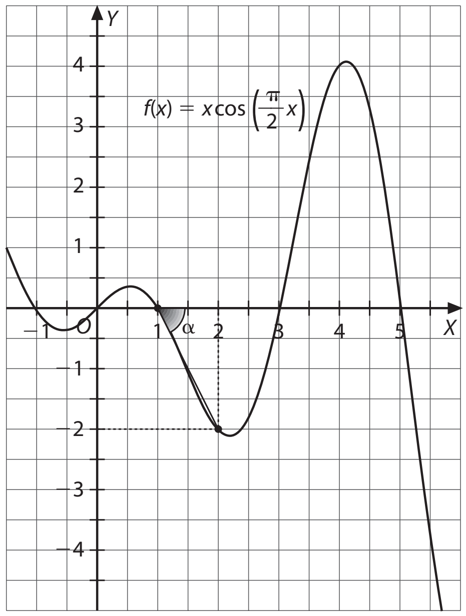


70 **Dada la función $f(x) = x \cos(\pi/2\ x)$, demuestra que $\alpha \in (1, 2)$ existe tal que $f'(\alpha) = -2$. Menciona los resultados teóricos que utilices.**

Como producto y composición de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, la función $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es, asimismo, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; y, en particular, lo será en el intervalo cerrado [1, 2].

Según el teorema del valor intermedio de Lagrange, si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe, por lo menos, un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Apliquemos este teorema a la función $f(x)$ en el intervalo $[1, 2]$. Dado que $f(1) = 0$ y $f(2) = -2$, tenemos:

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{-2 - 0}{1} = -2$$

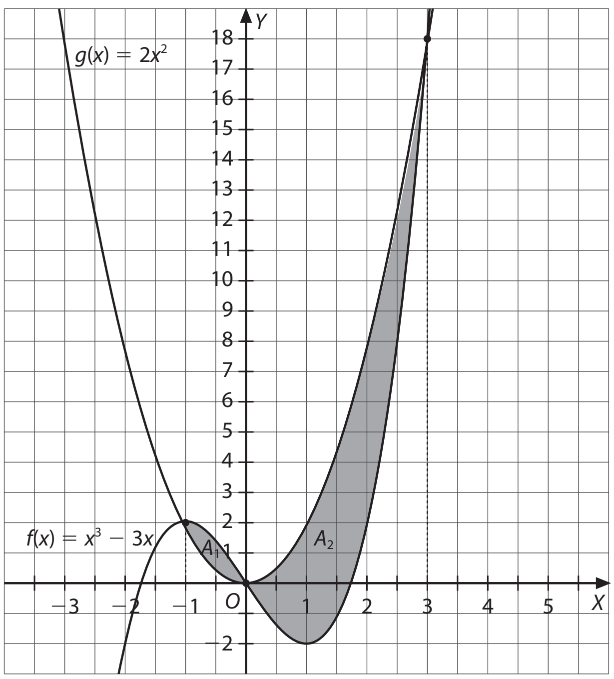
Por lo tanto, podemos asegurar que existe, por lo menos, un punto $\alpha \in (1, 2)$ en el cual la derivada de la función vale -2, es decir, donde se cumple que $f'(\alpha) = -2$ (en la gráfica se aprecia que, en este caso concreto, existen dos de ellos).

71 **Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.**

La función cúbica $f(x) = x^3 - 3x$ posee simetría impar; corta a los ejes de coordenadas en los puntos $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $(0, 0)$ y $\left(+\sqrt{3}, 0\right)$; y tiene un máximo relativo en el punto $(1, -2)$ y un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$. Por otro lado, la función $g(x) = 2x^2$ es una parábola abierta hacia arriba con simetría par (o sea, simétrica con respecto al eje OY) que corta a los ejes de coordenadas en el origen, es decir, en el punto , el cual es, a la vez, vértice de la parábola y mínimo absoluto de la función. Como funciones polinómicas, ambas están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}$. Calculemos los puntos de corte entre estas funciones:

$$f'(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x = 2x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +3 \end{cases}$$

Con toda esta información podemos esbozar las gráficas de las dos funciones, así como los recintos por ellas delimitados.



Como ambas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, lo son en el intervalo $[-1, 3]$, por lo que podemos calcular el área comprendida entre sus gráficas mediante integrales definidas y la regla de Barrow. En el intervalo la función $f(x)$ es mayor que la función $g(x)$, pues la gráfica de aquella queda por encima de la de esta. Por el contrario, en el intervalo $(0, 3)$ es la gráfica de $g(x)$ la que está por encima de la de $f(x)$, luego aquí $g(x)$ es mayor que $f(x)$. Las áreas, A_1 y A_2, de los dos recintos se calculan así:

$$A_1 = \int_{x_2}^{x_1} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - 2x^2 - 3x)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{12}\, u^2$$
$$A_2 = \int_{x_2}^{x_1} [g(x) - f(x)]dx = \int_{0}^{3} (-x^3 + 2x^2 + 3x)dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} = \left(-\frac{81}{4}x^4 + \frac{54}{3} + \frac{27}{2}\right) - 0 =$$
$$= \frac{135}{12}\, u^2$$

Por último, el área total, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{12} + \frac{135}{12} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6}\, u^2$$

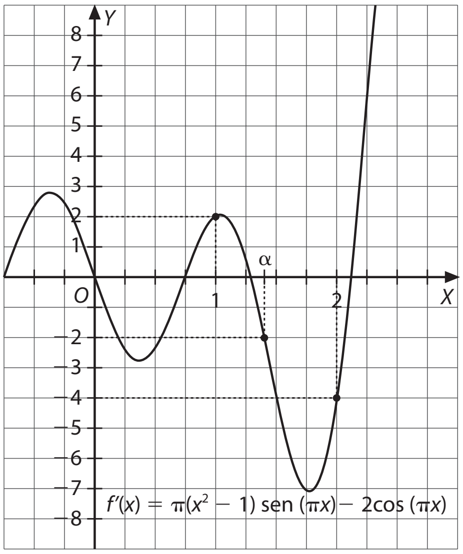
72 **Halla la integral indefinida: $\int x^2 \operatorname{sen}(2x)dx$**

Esta integral se puede obtener aplicando de forma reiterada el método de integración por partes:

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(2x)dx}_{dv} =$$
$$= \underbrace{x^2}_{u} \cdot \left[\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v}\right] - \int \left[\underbrace{-\frac{1}{2}\cos(2x)}_{v}\right]\underbrace{2xdx}_{du} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(2x)dx}_{dv} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \underbrace{x}_{u} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}_{v}\right] - \int \left[\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}_{v}\right]\underbrace{1dx}_{dv} =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos(2x)\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos(2x) + x\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} - x^2\right)\cos(2x) + x\operatorname{sen}(2x)\right] + C$$

73 Dada la función $f(x) = (1 - x^2)\cos(\pi x)$, demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(x) = -2$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

Como suma, producto y composición de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, la función $f(x) = (1 - x^2)\cos(\pi x)$ es, asimismo, continua y derivable en todo $\mathbb{R}$; y, en particular, lo será en el intervalo cerrado [1, 2]. Su derivada, $f'(x) = \pi(x^2 - 1)\,\text{sen}(\pi x) - 2x\cos(\pi x)$, es, por el mismo motivo, también una función continua en todo y, en concreto, en el intervalo cerrado [1, 2].



Según el teorema de los valores intermedios, si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y k está comprendido entre el máximo y el mínimo de la función en dicho intervalo, entonces existe al menos un punto $\alpha \in [a, b]$ tal que $f(x) = k$.

Apliquemos este teorema a la función derivada, $f'(x)$, en el intervalo [1, 2]. Como $f'(1) = 2$ y $f'(2) = -4$, podemos asegurar que $f'(x)$ toma en este intervalo todos los valores comprendidos entre 2 y -4. Por consiguiente, ha de existir por lo menos un punto $\alpha \in (1, 2)$ cuya imagen sea -2, es decir, donde se cumpla $f'(\alpha) = -2$.

74 Halla los siguiente límites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{\text{sen}(x^2)}}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(4x^2)}$

Para encontrar los límites solicitados, resolveremos las indeterminaciones que vayan surgiendo en cada caso:

i) Tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x^2)}} =$

$$= [\text{Indeterminación } 1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0} [\cos(2x) - 1]\frac{1}{\text{sen}(x^2)}}$$

Dado que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\text{sen}(x^2)} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{[\cos(2x) - 1]'}{[\text{sen}(x^2)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{sen}(2x)}{2x\cos(x^2)} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} = \lim_{x\to 0} \frac{[-2\,\text{sen}(2x)]'}{[2x\cos(x^2)]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{2\cos(x^2) - 4x^2\,\text{sen}(x^2)} = \frac{-4}{2} = -2$$

entonces:

$$\lim_{x\to 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\text{sen}(x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} [\cos(2x) - 1]\frac{1}{\text{sen}(x^2)}} = e^2 = \frac{1}{e^2}$$

ii)

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(4x^2)} =$$

$$= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]^{L'H} = \lim_{x\to 1/2} \frac{\left[1 - \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]'}{[\ln(4x^2)]'} =$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{-\frac{\pi}{2}\left[1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}{\frac{8\cancel{x}}{4x^{\cancel{2}}}} =$$

$$= \lim_{x\to 1/2} \frac{-\frac{\pi}{2}\left[1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]}{\frac{2}{x}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} \lim_{x\to 1/2} x\left[1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\cdot(1 + 1)\right] = -\frac{\pi}{4}$$

75 Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x(x + 2)$ y $g(x) = x^3$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

La función $f(x) = x(x + 2) = x^2 + 2x$ es una parábola abierta hacia arriba que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 0)$, y cuyo vértice y mínimo absoluto está en el punto $(-1, -1)$. Por otro lado, la función $g(x) = x^3$ posee simetría impar y corta a los ejes de coordenadas en el punto $(0, 0)$; carece de extremos y tiene un punto de inflexión en el origen de coordenadas. Como funciones polinómicas, ambas están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}$. Calculemos los puntos de corte entre estas funciones:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

Con esta información podemos ya esbozar las gráficas de las dos funciones, así como los recintos por ellas delimitados.

Como ambas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$, lo son en el intervalo $[-1, 2]$, por lo que podemos calcular el área comprendida entre sus gráficas mediante integrales definidas y la regla de Barrow. En el intervalo $(-1, 0)$ la función $g(x)$ es mayor que la función $f(x)$, pues la gráfica de aquella queda por encima de la de esta. Por el contrario, en el intervalo $(0, 2)$ es la gráfica de $f(x)$ la que está por encima de la de $g(x)$, luego aquí $f(x)$ es mayor que $g(x)$. Así pues, las áreas, A_1 y A_2, de los dos recintos se calculan de la siguiente manera:

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\mathrm{d}x =$$

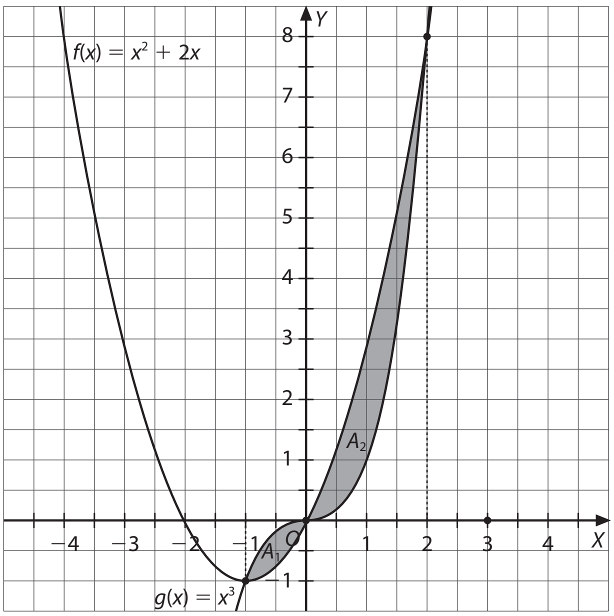
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{5}{12}\, u^2$$

$$A_2 = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2} = \left(-\cancel{4} + \frac{8}{3} + \cancel{4}\right) - 0 = \frac{8}{3}\, u^2$$

Finalmente, el área total, A, comprendida entre las gráficas de ambas funciones es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\, u^2$$

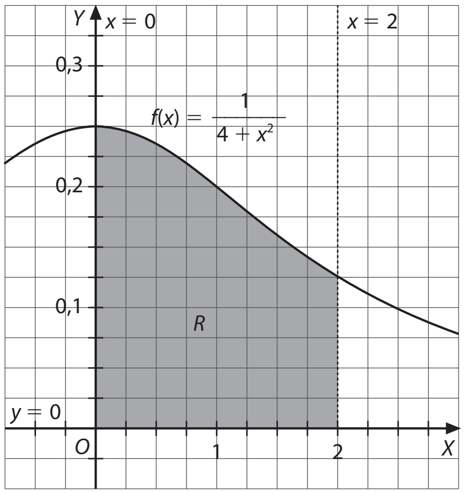


76 **Se considera, en el primer cuadrante, la región *R* del plano limitada por: el eje *X*, el eje *Y* la recta $x = 2$ y la curva $y = \dfrac{1}{4 + x^2}$.**

a) **Calcular razonadamente el área de la región *R*.**

b) **Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región *R* en dos partes *A* (izquierda) y *B* (derecha) tales que el área de *A* sea el doble que la de *B*.**

a)



Dado que el denominador de función racional polinómica:

$$f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$$

no se anula para ningún valor real de la variable independiente, $f(x)$ se halla definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Por dicha razón, la gráfica $f(x)$ no puede tener asíntotas verticales, aunque sí tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$ (eje OX). Esta función corta al eje OY en el punto $(0, 1/4)$, carece de puntos de corte con el eje OX y es estrictamente positiva en todo $\mathbb{R}$. Puede comprobarse, además, que $f(x)$ alcanza su máximo absoluto en el punto $(0, 1/4)$. Con esta información podemos esbozar la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Como, además, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo es, en particular, en el intervalo $[0, 2]$. Así pues, según la regla de Barrow, el área, S, de la región, R, delimitada por la función $f(x)$, el eje OX, el eje OY (es decir, $x_1 = 0$) y la recta $x_2 = 2$ será:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} \frac{1}{4 + x^2}\mathrm{d}x$$

Calcularemos primero la integral indefinida, que es de tipo arco tangente, mediante una sencilla manipulación y un cambio de variable:

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}(4+x^2)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x}{2} = t \\ \frac{1}{2}dx = dt \Leftrightarrow dx = 2dt \end{bmatrix} =$$

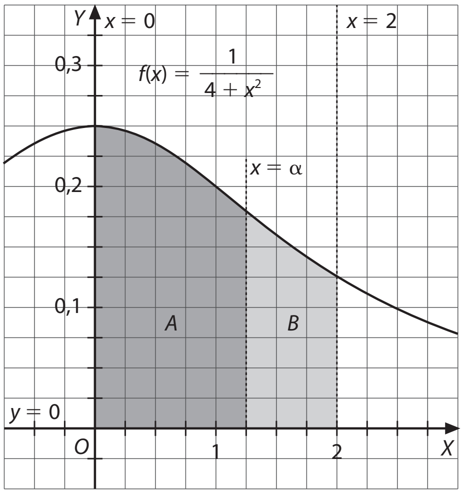
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dx = \frac{1}{2}\,\text{arctg}(t) + C = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Por lo tanto, el área solicitada es:

$$S = \int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{arctg}(1) - \frac{1}{2}\,\text{arctg}(0) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ \text{u}^2$$

b) Si la recta $x = \alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 2$, divide la región R en dos partes, A (a la izquierda) y B (a la derecha), tales que el área, S_A, de la primera es el doble que el área, S_B, de la segunda, entonces:



$$S_A = 2S_B$$

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = 2\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx$$

$$\left[\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 2\left[\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_\alpha^2$$

$$\frac{1}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\text{arctg}(0) = \text{arctg}(1) - \text{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\,\text{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Por lo tanto, la recta $x = 2\sqrt{3}/3$ divide la región en dos partes, A y B, tales que $S_A = 2S_B$.

77 **Se considera la función real $f(x) = x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:**

a) **La gráfica de la curva $y = f(x)$.**

b) **Los valores de x para los que está definida la función real $g(x) = \ln f(x)$.**

c) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$, razonando si tiene, o no, máximo absoluto.**

a) La función polinómica $f(x) = x^2 - 4$ está definida en toda la recta real, es continua en todo su dominio y su gráfica no tiene ningún tipo de asíntotas. Se trata de una parábola abierta hacia arriba, pues el coeficiente del término cuadrático es positivo, y presenta simetría respecto del eje OY (es simétrica par), ya que $f(x) = f(-x)$. Sus puntos de corte con los ejes de coordenadas son:

$$\text{Eje } OX\text{: } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (-2, 0), (+2, 0)$$

$$\text{Eje } OY\text{: } f(0) = 0^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow (0, -4)$$

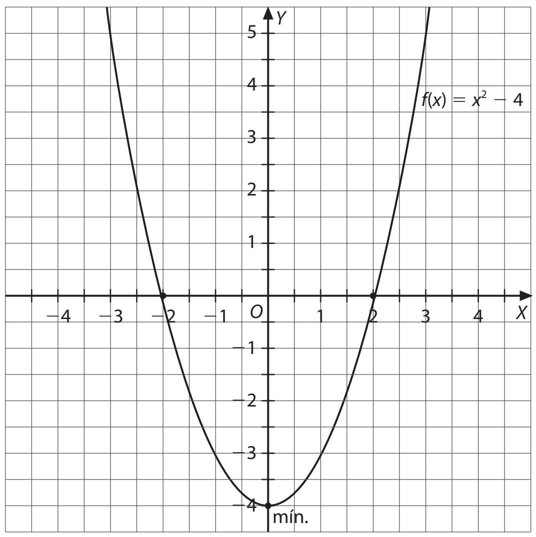
El vértice y mínimo absoluto de esta parábola coincide con su punto de corte con el eje OY, dado que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ \ f''(0) = 2 > 0$$

Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

Carece de puntos de inflexión, pues $f'' = 2 \neq 0$, por lo que siempre es abierta hacia arriba, como ya sabíamos desde el principio.

Con toda esta información, podemos esbozar la gráfica de la función $f(x)$.



b) La función logarítmica $g(x) = \ln f(x) = \ln (x^2 - 4)$ solo estará definida para aquellos valores de la variable independiente, x, que hagan que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo. Dado que:

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (+2, +\infty)$$

entonces:

$$\text{Dom } g(x) = (-\infty, -2) \cup (+2, +\infty) = \mathbb{R} - [-2, +2]$$

En otras palabras, la función logarítmica $g(x)$ solo está definida en la parte positiva de las ramas de la parábola $f(x)$.

c) Como:

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

comprobamos que la primera derivada de $g(x)$ se anula en un punto que no pertenece a su dominio de definición. Por consiguiente, esta función carece de extremos relativos. Con el fin de examinar su comportamiento evaluaremos $g'(x)$ en un par de puntos cualesquiera, uno situado antes de -2 y otro después de $+2$:

$$f'(x=-3) = -\frac{6}{5} < 0,\ \ f'(x=+3) = +\frac{6}{5} > 0$$

En conclusión, la función $g(x)$ es decreciente en la semirrecta $(-\infty, -2)$ y creciente en la semirrecta $(+2, +\infty)$.

Además, las rectas $x = \pm 2$ son asíntotas verticales de la gráfica de $g(x)$, puntos en los cuales esta función tiende a $-\infty$:

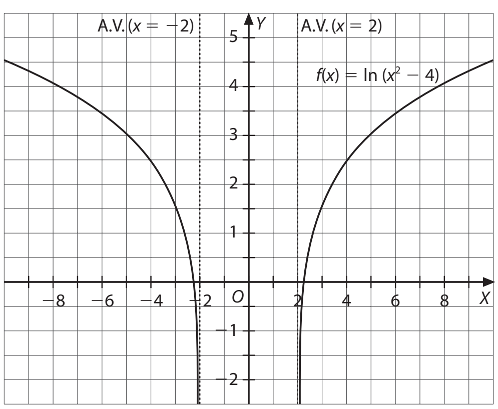
$$\lim_{x \to -2^-} g(x) = \lim_{x \to -2^-} \ln (x^2 - 4) = \ln 0^+ = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^+} g(x) = \lim_{x \to -2^+} \ln (x^2 - 4) = \ln 0^+ = -\infty$$

Por otro lado, su límite en el infinito es:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln (x^2 - 4) = \ln (+\infty) = +\infty$$

por lo cual la gráfica de $g(x)$ carece de asíntotas horizontales.

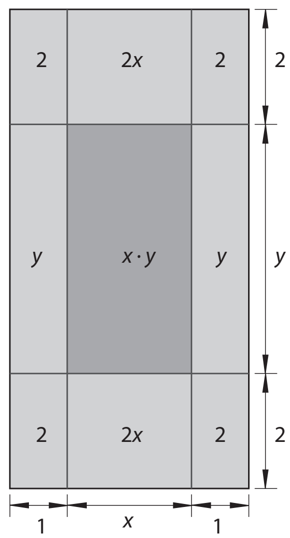
Tras este análisis, podemos esbozar su gráfica y asegurar que la función $g(x)$ no alcanza ningún máximo absoluto.



78 **Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel se mínimo.**

Denominemos x e y, respectivamente, el ancho de texto y su extensión a lo largo. Como es lógico, tenemos que $x > 0$ e $y > 0$. La superficie que ocupa el texto es, entonces $x \cdot y = 18$ cm^2. Si a las dimensiones del texto añadimos el tamaño de los márgenes, la hoja en la cual se imprima el texto habrá de tener un ancho de $x + 2$ y un largo de $y + 4$, por lo cual su superficie, S, será:

$$S(x, y) = (x+2) \cdot (y+4) = 4x + 2y + xy + 8$$



Dado que $x \cdot y = 18$ e $y = 18/x$, la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$S(x) = 4x + 2\,\frac{18}{x} + 18 + 8 = 4x + \frac{36}{x} + 26$$

Esta función de una sola variable es la que debemos optimizar. Sus extremos podrán hallarse donde se anule la primera derivada:

$$S'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Naturalmente, la solución negativa no es válida. La segunda derivada:

$$S''(x) = \frac{72}{x^3}$$

en el punto $x = 3$ es positiva, así que podemos asegurar que se trata, en efecto, de un mínimo.

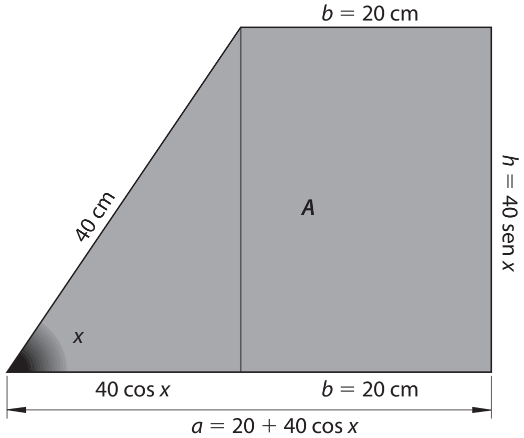
En conclusión, las dimensiones del texto serán de $x = 3$ cm e $y = 6$ cm, con lo cual la hoja deberá tener un ancho de 5 cm y un largo de 10 cm para que el consumo de papel sea mínimo.

Análisis (continuidad, derivadas, integrales y funciones) (CONTINUACIÓN)

79 Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. Calcular esta área máxima.

El área, A, de un trapecio rectangular es:

$$A = \frac{a+b}{2}\cdot h$$



expresión en la cual a y b son, respectivamente, su base mayor y su base menor, y h es su altura. Según los datos del problema, las dimensiones, en cm, de la ventana trapezoidal son:

$$a = 20 + 40\cos x,\ b = 20,\ h = 40\,\text{sen}\,x$$

donde x es el ángulo formado por el lado oblicuo, de 40 cm, y la base mayor. Lógicamente, $0 < x < \pi/2$.

Teniendo todo esto en cuenta, el área, $A(x)$, de la ventana será:

$$A(x) = \frac{(20 + 40\cos x) + 20}{2}\cdot 40\,\text{sen}\,x =$$

$$= \frac{40 + 40\cos x}{2}\cdot 40\,\text{sen}\,x = 20(1+\cos x)\cdot 40\,\text{sen}\,x =$$

$$= 800(1+\cos x)\text{sen}\,x$$

La función $A(x)$ será máxima donde lo sea la función $f(x) = \text{sen}\,x(1+\cos x)$. Su primera derivada es:

$$f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \text{sen}\,x(-\text{sen}\,x) =$$

$$= \cos x + \overbrace{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}^{\cos 2x} = \cos x + \cos 2x$$

Veamos ahora dónde se anula esta primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = -\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}\,2x = -(\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x)$$

que evaluada en $x = \pi/3$ es, claramente, negativa. Así pues, $A(x)$ alcanza su máximo para un ángulo de $x = \pi/3 = 60°$. El área máxima de la ventana trapezoidal será:

$$A\left(x = \frac{\pi}{3}\right) = 800\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 800\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 800\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 600\sqrt{3} \approx 1\,040\ \text{cm}^2 = 0{,}104\ \text{m}^2$$

80 Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$. Se pide obtener razonadamente:

a) **La integral $\int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$**

b) **La expresión de la derivada $F'(x)$ de la función $F(x)$.**

c) **La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$.**

a) Dado que la función polinómica:

$$f(t) = at + b\ (\text{con } a, b \in \mathbb{R})$$

es continua en toda la recta real, también lo es, en particular, en el intervalo $[1, x+1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Así pues, según la regla de Barrow la integral solicitada es:

$$\int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{x+1}(at+b)\mathrm{d}t = \left[\frac{a}{2}t^2 + bt\right]_1^{x+1} =$$

$$= \left[\frac{a}{2}(x+1)^2 + b(x+1)\right] - \left(\frac{a}{2} + b\right) =$$

$$= \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{\cancel{2}}\cancel{2}x + \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}bx + \cancel{b} - \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}} - \cancel{b} = \frac{a}{2}x^2 + (a+b)x$$

b) Según el resultado obtenido en el apartado anterior, tenemos:

$$F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = x\left(\frac{a}{2}x^2 + (a+b)x\right) =$$

$$= \frac{a}{2}x^3 + (a+b)x^2$$

Esta función polinómica es derivable en todo $\mathbb{R}$, y su derivada es:

$$F'(x) = \frac{3a}{2}x^3 + 2(a+b)x$$

c) Si derivamos de nuevo la expresión anterior:

$$F''(x) = 3ax + 2(a+b)$$

Si esta segunda derivada debe anularse en el punto de abscisa , entonces:

$$F''(0) = 2(a+b) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$$

81 **Para cada número real positivo α, se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:**

a) **El área de la región del plano limitada por el eje *X*, el eje *Y*, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$.**

b) **El valor α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0, 0), $(\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 6 + \alpha)$, $(0, 6 + \alpha)$ en dos regiones de igual área.**

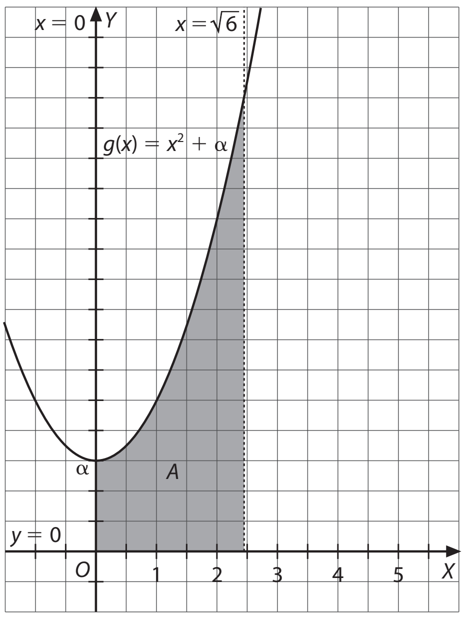
a) La función polinómica $g(x) = x^2 + \alpha$ (con $\alpha \geq 0$) está definida en toda la recta real y es continua en todo su dominio. Se trata de una parábola abierta hacia arriba, pues el coeficiente del término cuadrático es positivo, y presenta simetría respecto del eje *OY* (es simétrica par), ya que $f(x) = f(-x)$. Como $\alpha \geq 0$, $g(x)$ no corta al eje *OX*, pues:

$$g(x) = x^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\alpha \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{-\alpha}$$

que carece de soluciones reales. Además, dado que $x^2 + \alpha \geq \alpha \;\forall\, x \in \mathbb{R}$, esta función siempre es positiva. Por otro lado, $f(0) = \alpha$, por lo que el punto de corte con el eje *OY* es $(0, \alpha)$. Este punto es su vértice y su mínimo relativo, ya que:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \;\; g''(0) = 2 > 0$$

Con esta información, podemos esbozar la gráfica de la función $g(x)$ en el intervalo $\left[0, \sqrt{6}\right]$.



Como $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, lo es, en particular, en dicho intervalo. Por lo tanto, según la regla de Barrow, el área, *A*, de la región del plano delimitada por la función $g(x)$, el eje *OX*, el eje *OY* (o sea, $x_1 = 0$) y la recta $x_2 = \sqrt{6}$ será:

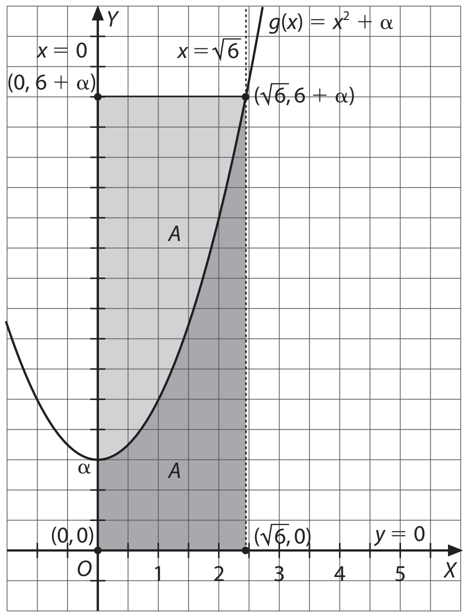
$$A = \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_0^{\sqrt{6}} (x^2 + \alpha)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \alpha x\right]_0^{\sqrt{6}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}^3 + \alpha\sqrt{6}\right) - 0 = \frac{1}{3}6\sqrt{6} + \alpha\sqrt{6} =$$

$$= (2 + \alpha)\sqrt{6}\ \text{u}^2$$

b) El área, $A_{\mathbb{R}}$, del rectángulo de vértices (0, 0), $\left(\sqrt{6}, 0\right)$, $\left(\sqrt{6}, 6 + \alpha\right)$ y $(0, 6 + \alpha)$, es:

$$A_{\mathbb{R}} = b \cdot h = \sqrt{6}(6 + \alpha)\ u^2$$



Si este rectángulo ha de ser dividido por la curva de la función $g(x) = x^2 + \alpha$ en dos regiones de la misma área, entonces el área calculada en el apartado anterior debe ser la mitad del área del rectángulo. Así pues:

$$A = \frac{1}{2}A_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (2 + \alpha)\cancel{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}(6 + \alpha)\cancel{\sqrt{6}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\alpha = 6 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$$

En conclusión, la curva de la función $g(x) = x^2 + 2$ divide el rectángulo en dos regiones de áreas iguales.

82 **Un móvil se mueve con velocidad constante de 2 m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta $x = 1$, partiendo del punto $M = (1, 0)$ situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:**

a) **Las coordenadas del punto $M(t)$ donde está situado el móvil después de *t* segundos.**

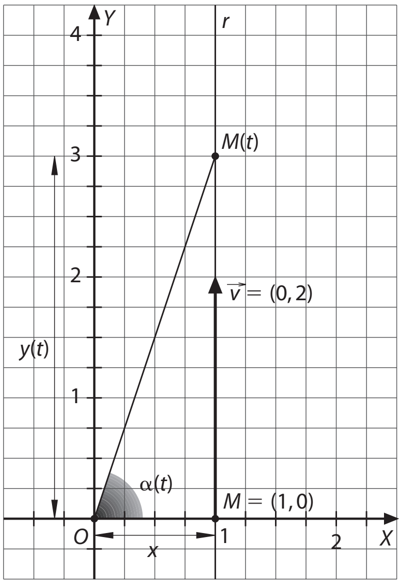
b) **La función $m(t)$ igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto $O = (0, 0)$ y por el punto $M(t)$.**

c) **La derivada de la función $m(t)$.**

a) El móvil parte de una posición inicial dada por el punto $M = (1, 0)$ m y se mueve con una velocidad constante de 2 m/s, en el primer cuadrante del plano *XY*, sobre la recta, *r*, de ecuación $x = 1$. El vector velocidad, por lo tanto, es $\vec{v} = (0, 2)$ m/s. De este modo, el

punto $M(t) = (x(t), y(t))$ donde se sitúa el móvil en un tiempo cualquiera, *t,* pertenece a dicha recta. Si escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta *r* a partir del punto *M* como punto de referencia, del vector velocidad, $\vec{v}$, como vector director de la misma, y del parámetro tiempo, *t,* obtenemos las coordenadas del punto $M(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 0t \\ y(t) = 0 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ m} \\ y(t) = 2t \text{ m} \end{cases} \Leftrightarrow M(t) = (1, 2t) \text{ m}$$



Por el propio significado físico del problema, el parámetro *t* es positivo, es decir, $t \geq 0$. Por lo tanto, el móvil se desplaza, en realidad, sobre una semirrecta.

b) La función $m(t)$, definida como la pendiente de la recta que une el origen de coordenadas, $O = (0, 0)$, con el punto $M(t) = (1, 2t)$, será la tangente de ángulo, $\alpha(t)$, que dicha recta subtiende con el eje *OX* en el instante de tiempo *t.* Por consiguiente:

$$m(t) = \text{tg}(\alpha(t)) = \frac{y(t)}{x} = \frac{2t}{1} = 2t$$

c) La derivada de la función $m(t) = 2t$ es, simplemente, $m'(t) = 2$.

83 **En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan *x* metros. Obtener razonadamente:**

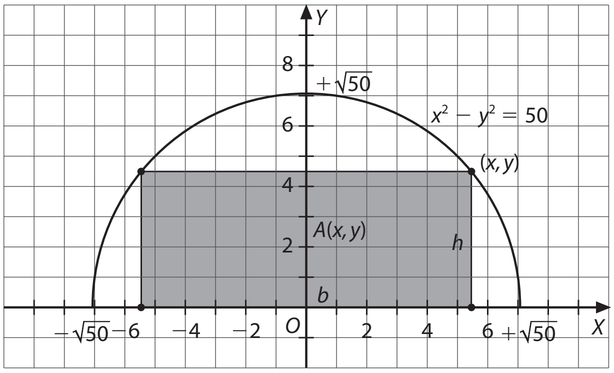
a) **El área del rectángulo en función de *x*.**

b) **El valor de *x* para el que es máxima el área del rectángulo.**

a) Tomemos un punto de abscisa, *x,* positiva para marcar la mitad de la base, *b,* del rectángulo inscrito en el semicírculo de radio $r = \sqrt{50}$ m que queda por encima del eje *OX*. Con esta elección, tenemos que $0 \leq x \leq 50$ y $b = 2x$. Podemos hallar la altura, *h*, de este rectángulo a partir de la ordenada, *y,* que la ecuación de la circunferencia, $x^2 + y^2 = r^2$, le hace corresponder al punto de abscisa *x:*

$$x^2 + y^2 = 50 \Leftrightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

Al igual que ocurría con la variable independiente, *x,* aquí también $0 \leq x \leq 50$, ya que se trata de la semicircunferencia que está por encima del eje *OX*.



El área, *A,* del rectángulo inscrito en el semicírculo es, en definitiva:

$$A = b \cdot h = 2x \cdot y = 2x\sqrt{50 - x^2}$$

b) Expresemos el área del rectángulo de la siguiente manera:

$$A(x) = 2\sqrt{50x^2 - x^4}$$

Si $A(x)$ es máxima, lo será porque la función que figura en el radicando, $f(x) = 50x^2 - x^4$, también lo es. Veamos donde se anula la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 100x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(25 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 5 \end{cases}$$

La solución negativa no es válida y la solución nula se corresponde, como es lógico, con un mínimo de la función área cuyo valor es cero. Veamos, pues, el signo de la segunda derivada, $f''(x) = 100 - 12x^3$, en el punto de abscisa $x = 5$:

$$f''(x = 5) = 100 - 12 \cdot 5^2 = -200$$

Por tanto, este punto se corresponde, con un máximo. En conclusión, el rectángulo de máxima área se obtiene haciendo $x = 5$ m: su base será $b = 2x = 10$ m, su altura será $h = y = 5$ m, y su área, $A = 50$ m^2.